DIDIER DACUNHA-CASTELLE

Applications des ultraproduits à la théorie des plongements des espaces de Banach

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 117-125.

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__117_0>

Colloque Anal. fonctionn. [1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 117-125.

APPLICATIONS DES ULTRAPRODUITS À LA THÉORIE DES PLONGEMENTS DES ESPACES DE BANACH

par

Didier DACUNHA-CASTELLE

Dans cet exposé, nous voudrions indiquer ce que pourrait être une théorie des caractérisations des espaces de Banach relativement aux isomorphismes (ou aux isométries). Si les définitions générales sont inspirées d'idées classiques en logique, les démonstrations ne font pas appel à des résultats de logique. Après avoir défini un cadre général d'étude, nous donnons dans une deuxième partie, à titre d'exemple, un certain nombre de résultats concrets, relevant de l'analyse fonctionnelle classique.

1°) Caractérisations de type universel.

Donnons d'abord des exemples. Un des plus importants est celui de la caractérisation des espaces isomorphes à un espace d'Hilbert due à Grothendieck [2] Lindenstrauss et Pelczynski en ont donné une démonstration élémentaire (géométrie de $\mathbb{R}^n$) et en ont tiré l'essentiel de la théorie des opérateurs p-sommants, de nombreux résultats sur la géométrie des L^p , tandis que par ailleurs cette caractérisation est fondamentale en théorie des produits tensoriels.

Notation 1 : Nous noterons $T : B \overset{\lambda}{\to} C$ un isomorphisme d'un espace de Banach B sur un espace de Banach C tel que : $\lambda = \|T\| \ \|T^{-1}\|$. Si $\mathcal{C}$ est une classe d'espace de Banach, nous noterons $B \overset{\lambda}{\to} \mathcal{C}$, l'existence de C élément de $\mathcal{C}$ et de $T : B \overset{\lambda}{\to} C$.

PROPOSITION [2] : Pour qu'un espace de Banach B soit λ-isomorphe à un espace de Hilbert, c'est-à-dire pour que $B \overset{\lambda}{\to} \mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est la classe des espaces de Hilbert il faut et il suffit que l'ensemble Γ de conditions suivantes soient vérifiées :

pour toute matrice $(a_i^j)_{\substack{i=1.N \\ j=1..N}}$ telle que $|t_i| \leq 1$, $|s_j| \leq 1$

impliquent $\left| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i^j \, t_i \, s_j \right| \leq 1$, on a

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \ \forall x_1^* \ldots \forall x_n^* \ \left| \sum_i \sum_j a_i^j \, a_j^* \, (x_i) \right| \leq K(\lambda) \ \sup_i \|x_i\| \ \|\sup_j\| \ x_j^* \|$$

où K est une constante "universelle".

Indiquons d'autres exemples.

Dans [7] nous avons montré qu'un espace est isométrique à un sous-espace d'un espace L^p , $1\leqslant p\leqslant 2$ si et seulement si la fonction $x \to \|x\|^p$ est de type négatif, soit :

pour tout n , tout système $(\rho_1 \dots \rho_n)$, $\rho_i \in \mathbb{R}$, tel que $\sum_{i=1}^{n} \rho_i = 0$, on a :

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \quad \sum_{i=1}^{n} \|x_i - x_j\|^p \rho_i \rho_j \leqslant 0 .$$

On a des caractérisations analogues pour $p>2$.

Enfin, les caractérisations classiques de la théorie des espaces de Banach réticulés (Kakutani, Nakano, etc... [3], [7]) sont du même type, et relèvent immédiatement de la définition qui suit.

Définition 1. - Caractérisation de type universel.

Soit $\mathcal{C}$ une classe d'espaces de Banach. On appelle caractérisation de type universel (aux isométries près) de $\mathcal{C}$ une caractérisation de $\mathcal{C}$ par un ensemble Γ de conditions du type :

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \ ((\|\sum_{i=1}^{n} a_i^j x_j\|)_{i=1\dots m} \in F)$$

où les $(a_i^j)_{\substack{i=(1\dots m)\\ j=(1\dots n)}}$ sont des matrices réelles (une matrice par élément de Γ) et les F des cônes fermés de $\mathbb{R}^m$.

Cette définition s'étend en fait à d'autres structures de "l'analyse", EVTLC, vectoriels, métriques, algèbres de Banach, etc... Nous donnons à titre d'exemple celles des EVTLC quand ceux-ci ont une topologie définie par une suite de semi-normes $\|\ \|_n$.

Définition 1'. - Soit $\mathcal{C}$ une classe d'EVTLC donnée par une suite de semi-normes $\|\ \|_n$. Une caractérisation de type universel de $\mathcal{C}$ est une caractérisation par un ensemble Γ de conditions du type suivant :

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \ ((\|\sum_{i=1}^{n} a_i^j x_j \|_{k(i)})_{\substack{i=1\dots m\\ k(i)\in \mathbb{N}}} \in F)$$

où (a_i^j) et F ont le même sens que dans la définition 1.

2°) Plongements, dimension linéaire, finitude.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux classes d'espaces de Banach.

Définition 2. - Plongements.

On dit que $\mathcal{C}$ se plonge dans $\mathcal{C}'$ par λ-isomorphisme si pour tout B dans $\mathcal{C}$, on a :

$$B \overset{\lambda}{\to} \mathcal{C}' \quad \text{(voir notation 1).}$$

Pour simplifier, on supposera dorénavant les classes de Banach considérées, stables pour l'opération de sous-espace fermé.

Cette définition recouvre évidemment la définition classique de la dimension linéaire au sens de Banach [1] qui correspond au cas des isométries ($m = M = 1$).

La plupart des problèmes liés à l'étude géométrique de Banach, à la recherche d'invariants, etc... relèvent de l'étude des propriétés des espaces de dimension finie et d'un procédé de recollement.

La définition suivante est relative aux espaces de Banach pour lesquels il est possible de recoller des isomorphismes (ou des isométries).

Définition 3. - Finitude.

Une classe $\mathcal{C}$ d'espaces de Banach est dite avoir la propriété de finitude (pour les λ-isomorphismes) si et seulement si les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $B \overset{\lambda}{\to} \mathcal{C}$

2. pour tout F sous-espace de dimension finie de B , on a $F \overset{\lambda}{\to} \mathcal{C}$.

Cette définition s'étend, comme pour la remarque faite après la définition 1, à d'autres structures que les espaces de Banach.

3°) Ultraproduits.

Cette technique est une modification (légère) d'une technique largement utilisée en théorie des modèles. Elle permettra de donner un critère simple d'existence de caractérisations, d'éclaircir le rapport caractérisation-finitude et d'attaquer un certain nombre de problèmes plus concrets.

Définition 4. - Ultraproduits de Banach.

Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces de Banach, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I . Soit $\hat{B}' = \{ (f_i)_{i \in I}$, $f_i \in B_i$ pour tout i ;

il existe M tel que $\|f_i\| \leqslant M$ pour tout i } .

On pose $\|(f_i)_{i\in I}\| = \lim_{\mathcal{D}} \|f_i\|$,

$W = \{ (f_i)_{i\in I} , \|(f_i)_{i\in I}\| = 0 \}$.

Nous appelons ultraproduit (suivant $\mathcal{D}$) des $(B_i)_{i\in I}$ et nous notons $\pi_I B_i/_{\mathcal{D}}$ le quotient $\hat{B}/_W$. C'est un espace de Banach pour la norme $\|(f_i)_{i\in I}\|$. (Démonstration élémentaire).

De la même manière, on a la définition pour les EVTLC.

Définition 4'. - Ultraproduits d'EVTLC.

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'EVTLC, E_i étant définie à partir d'une suite $\| \ \|_n$ de semi-normes.

$\hat{E} = \{ (f_i)_{i\in I} , f_i \in E_i$; pour tout n il existe M_n , $M_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $\| f_i \|_n \leqslant M_n \}$. On pose alors :

$$\|(f_i)_{i\in I}\|_n = \lim_{\mathcal{D}} \| f_i \|_n$$

où $\mathcal{D}$ est un ultrafiltre sur I

$W = \{ (f_i)_{i\in I} , \|(f_i)\|_n = 0$ pour tout n } .

$\hat{E}/_W$ est l'ultraproduit des E_i . C'est un EVTLC noté $\pi_I E_i/_{\mathcal{D}}$.

Exemple 1 : Soit B un espace de Banach, $(B_F)_{F\in \mathfrak{F}}$ la famille de ses sous-espaces de dimension finie. Alors il existe une isométrie canonique $B \xrightarrow{\text{dans}} \pi_{\mathfrak{F}} B_F/_{\mathcal{D}}$ (où est un ultrafiltre non trivial sur $\mathfrak{F}$). Elle est en effet définie par $x \to (x_F)_{F\in \mathfrak{F}}$ où

$$\begin{aligned} x_F &= x \quad \text{si} \quad x \in F \\ &= 0 \quad \text{si} \quad x \notin F . \end{aligned}$$

Exemple 2 : Soit E un EVTLC parfait (par exemple $\mathbb{R}^n$ muni d'une certaine norme, $\mathcal{D}(0,1)$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ etc...).

Alors on a $E^I/_{\mathcal{D}} = E$, c'est-à-dire toute ultrapuissance de E est isométrique à E .

En effet, les bornés étant compacts, on peut poser $\hat{x} = \lim_{\mathcal{D}}(x_i)$ et identifier $(x_i)_{i\in I}$ à $\hat{x}$. Il est facile de vérifier que l'on a un isomorphisme.

4°) Critère d'existence de caractérisations universelles.

THEOREME 1. - Soit $\mathcal{C}$ une classe d'espaces de Banach. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{C}$ <u>est stable par isométrie, par sous-espace fermé, par ultraproduit.</u>
2. $\mathcal{C}$ <u>admet une caractérisation de type universel.</u>

COROLLAIRE 1. - <u>Soit</u> $\mathcal{C}'$ <u>la classe des espaces de Banach λ-isomorphe à une classe</u> $\mathcal{C}$ <u>caractérisable. Alors</u> $\mathcal{C}'$ <u>est caractérisable.</u>

$2 \Rightarrow 1$ est immédiat.

$1 \Rightarrow 2$ est élémentaire lorsque l'on a montré le lemme suivant :

LEMME 1. - Soit $\mathcal{C}$ une classe de Banach, stable par sous-espace et ultraproduit. La propriété de se plonger (m, M) dans $\mathcal{C}$ s'exprime par des conditions Γ' du type :

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \ (\|x_1\| \neq \delta_1 \text{ ou}\ldots\text{ou } \|x_n\| \neq \delta_n$$

$$\text{ou} \quad \|\sum_{j=1}^{n} a_i^j x_j\| \neq \varepsilon_1 \text{ ou}\ldots\text{ou } \|\sum_{j=1}^{n} a_m^j x_j\| \neq \varepsilon_m)$$

avec $\delta_1 \ldots \delta_n$, $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m$ $\mathbb{R}^+$, les (a_i^j) étant des matrices réelles.

<u>Démonstration</u> : Il est clair que tout espace B tel que $B \underset{(1,1)}{\to} \mathcal{C}$ satisfait Γ' si $\mathcal{C}$ satisfait Γ' .

Inversement, soit Γ' l'ensemble des conditions du type indiqué satisfaite par tous les éléments de $\mathcal{C}$. Soit B satisfaisant Γ' . Pour chaque partie finie $X = \{a_1 \ldots a_n\}$ de B il existe B_X de $\mathcal{C}$ et $\{\overline{a_1} \ldots \overline{a_n}\}$ dans B_X tels que $\|a_i\| = \|\overline{a_i}\|$, $\overline{a_i} + \overline{a_j} = \overline{a_k}$, si $a_i + a_j = a_k$, $\overline{a_\ell} = \lambda\ \overline{a_m}$ si $a_\ell = \lambda a_m$ où $1 \leqslant i$, $j, k, m \leqslant n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. En effet, s'il n'en était pas ainsi, tout espace de la classe $\mathcal{C}$ satisferait la condition :

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \ (\|x_1\| \neq \|a_1\| \text{ ou}\ldots\text{ou } \|x_n\| \neq \|a_n\|$$

$$\text{ou}\ldots\text{ou } \|x_i + x_j - x_k\| \neq 0 \quad \text{ou}\ldots\text{ou } \|x_\ell - \lambda\ a_m\| \neq 0 \quad \text{ou}\ldots) .$$

Cette condition serait alors dans Γ' , or elle n'est pas satisfaite par B (puisque contredite par $(a_1 \ldots a_n) \in B$) . Ceci est contraire à l'hypothèse. Soit alors $\mathcal{D}$ un ultrafiltre sur l'ensemble S des parties finies de B tel que pour tout $X \in S$, $\{Y \in S , Y \supset X\} \in \mathcal{D}$. Soit $\hat{B} = \pi_S B_X/\mathcal{D}$. Par hypothèse $\hat{B}$ est dans $\mathcal{C}$ puisque $\mathcal{C}$ est stable par ultraproduit. On définit alors une isométrie $T : B \to \hat{B}$ en posant :

$$T(a) = (u_X)_{X \in S} \quad \text{avec } u_X = 0 \text{ si } a \notin X \text{ , } u_X = \overline{a} \text{ si } a \in X \text{ ,}$$

d'où le lemme.

Le problème de l'existence de caractérisations pour des classes d'espaces de Banach (ou par des théorèmes analogues pour des classes d'EVTLC, d'algèbres de Banach, etc...), se ramène donc au problème de savoir si oui ou non une classe est stable par ultraproduit. Remarquons en particulier que dès qu'il existe, une caractérisation aux isométries près d'une classe, il existe aussi une caractérisation aux λ-isomorphismes près de cette même classe, à condition que λ soit fixé (voir exemple ci-dessous). Donnons une liste de classes stables par ultraproduit.

1. La classe $\mathcal{C}$ des sous-espaces fermés d'un espace $\mathbb{R}^n$, des sous-espaces fermés d'un seul espace parfait E .

2. La classe des sous-espaces des espaces L^p , p fixé, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. [7]

3. La classe des sous-espaces des espaces localement bornés L^p , $0 < p < 1$. [6]

4. La classe des sous-espaces des espaces $L^\circ(\Omega, \mathcal{A}, P)$, espace des classes de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, muni de la convergence en probabilité. [6]

5. Certaines classes d'espaces d'Orlicz L_F (pour certaines valeurs de la fonction F). [8]

6. La classe des sous-**algèbres** de Banach de $\ell^p(I)$ (par contre la classe des sous-espaces de $\ell^p(I)$, I ensemble quelconque n'est pas stable par ultraproduit). De même, les sous-algèbres $\ell_F(I)$. [9]

7. La classe des sous-espaces de $C(0,1)$ n'est pas stable par ultraproduit.

8. La classe $\mathcal{H}$ de tous les espaces isomorphes à un espace d'Hilbert (sans préciser la borne λ) n'est pas stable par ultraproduit. En effet, $\mathbb{R}^n_\infty$ (muni de la norme sup) est dans $\mathcal{C}$.

Si $\mathcal{H}$ était stable par ultraproduit $\pi\mathbb{R}^n_\infty/\mathcal{B} \xrightarrow{\lambda} \mathcal{H}$ pour certains λ . Or il est facile de voir que :

$$\ell^\infty \underset{(1,1)}{\to} \pi\mathbb{R}^n_\infty/\mathcal{B} \qquad \text{et} \quad \ell^\infty \overset{\lambda}{\not\to} \mathcal{H} \quad \text{quel que soit } \lambda .$$

Le problème de trouver explicitement les caractérisations est évidemment très large, car certaines caractérisations sont plus simples que d'autres.

Dans le cas de $\mathcal{B}(0,1)$ par exemple, l'existence d'une caractérisation ne paraît nullement évidente . Il reste à trouver cette caractérisation sous la forme la plus simple possible (et donc il faut bien choisir en conséquence la suite des semi-normes). Par contre, dans le cas de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ il est facile d'écrire immédiatement une caractérisation de type universel.

5°) Caractérisation et finitude.

On a l'implication suivante :

PROPOSITION 2. - L'existence d'une caractérisation universelle pour une classe $\mathcal{C}$ implique la propriété de finitude.

En effet, si $\mathcal{C}$ est caractérisable, $\mathcal{C}$ est stable par ultraproduit. Alors soit B tel que pour tout B_F de dimension finie de B on ait :

$$B_F \xrightarrow{\lambda} \mathcal{C} .$$

On a, par ultraproduit :

$$\prod_{\mathfrak{F}} B_F/_{\mathcal{B}} \xrightarrow{\lambda} \mathcal{C}$$

et on sait (exemple 1 de (3°)) que l'on a canoniquement :

$$B \underset{(1,1)}{\rightarrow} \prod_{\mathfrak{F}} B_F/_{\mathcal{B}}$$

donc

$$B \xrightarrow{\lambda} \mathcal{C} .$$

La réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant. Soit $\mathcal{C}$ la classe des Banach X tels que pour tout sous-espace de dimension finie X_F de X , il existe p , $2 \leqslant p < \infty$ avec $X_F \underset{(1,1)}{\rightarrow} L^p$.

On a évidemment, par définition même, la propriété de finitude.

Pour $2 \leqslant p < \infty$, $L^p(0,1)$ est dans $\mathcal{C}$. Comme si $f \in L^\infty(0,1)$, $\|f\|_\infty = \lim\limits_p \|f\|_p$, on a :

$$L^\infty \underset{(1,1)}{\rightarrow} \prod_{[2,\infty[} L^p/_{\mathcal{B}} .$$

Mais $L^\infty \underset{(1,1)}{\not\rightarrow} \mathcal{C}$.

(Il est facile de le voir sur des sous-espaces à deux dimensions).

6°) Résultats et problèmes, dans le cas des espaces L^p et des espaces d'Orlicz.

On a la caractérisation suivante des espaces L^p .

THEOREME 2. - Soit E un espace de Banach, m, $M \geqslant 0$, $m \leqslant M$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un espace $L^p(\Omega,\mu)$ contenant E tel que $m\,\|f\|^p$

$m \|f\|^p \leqslant \int |f|^p \, d\mu \leqslant M \|f\|^p$ c.à.d. tel que $E \overset{\lambda}{\to} L^p$, $(\lambda \leqslant \frac{M}{m})$.

2. Quels que soient les rationnels σ_j , a_j^i , $1 \leqslant j < m$, $1 \leqslant i \leqslant n$ tels que $\sum_j \sigma_j \, |\sum_{i=1}^n a_j^i x_i|^p \geqslant 0$ pour tout $x_i \in \mathbb{R}$, alors $\forall f_1 \dots \forall f_n \in E$ on a :

$$\sum_{j=1}^n m_j \sigma_j \quad \|\sum_{i=1}^n a_j^i f_i\|^p \geqslant 0$$

où $m_j = M$ si $\sigma_j \geqslant 0$, $m_j = m$ si $\sigma_j < 0$.

Principe de la démonstration [9] (très analogue à un résultat de [5]). La classe des L^p est stable par ultraproduit [7], il suffit donc pour montrer que $2 \Rightarrow 1$, de le montrer pour un espace E de dimension finie.

On applique alors le lemme suivant, de type classique.

LEMME 2. - Soit E un espace vectoriel, C un cône convexe, $\mathcal{G}$ un système de générateurs de E . A chaque $f \in \mathcal{G}$, on associe deux réels m_f et M_f . Alors pour qu'il existe une application linéaire $T : E \to \mathbb{R}$, $T \geqslant 0$ sur C telle que $m_f \leqslant Tf \leqslant M_f$ pour $f \in \mathcal{G}$, il faut et il suffit que quels que soient f_i , $g_j \in \mathcal{G}$, a_i , $b_j \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^n a_i f_i - \sum_{j=1}^m b_j g_j \in C \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i M_{f_i} - \sum b_j m_{g_j} \geqslant 0 .$$

Pour appliquer le lemme, on choisit une base $(e_1 \dots e_n)$ de E et l'on interprète E comme un espace de fonctions continues sur S^* sphère unité de E^* . Il suffit d'appliquer alors le lemme à l'espace engendré par les fonctions $t \to |\langle f,t\rangle|^p$.

La démonstration du théorème est très voisine de celle de la formule de Pietsch dans la théorie des opérateurs sommants. Remarquons que la caractérisation ainsi obtenue n'est pas la "meilleure" possible puisque dans le cas $m = M = 1$ nous en avons donné une plus "simple". Elle peut s'interpréter (remarque de M. Kwapièn) en termes d'opérateurs p-sommants .

Indiquons maintenant quelques résultats et problèmes dans la théorie des espaces d'Orlicz. Soit F strictement croissante, convexe sur $\mathbb{R}^+$, et $L_F(\Omega,\mu)$ l'espace d'Orlicz associé à F [4].

Supposons que F soit une fonction de Karamata, c'est-à-dire qu'il existe p et q avec $\lim_{x \to 0} \frac{F(\lambda x)}{F(x)} = \lambda^q$ et $\lim_{x \to \infty} \frac{F(\lambda x)}{F(x)} = \lambda^p$, (toutes les fonctions à croissance "régulière" moindre qu'exponentielle sont de ce type).

PROPOSITION 3. - Si F est une fonction de Karamata, on a [8] :

$$\Pi_I L_F(\Omega_i \ , \mu_i)/_{\mathcal{D}} \ = L_F(\Omega,\mu) \oplus L^p(\Omega_1, \mu_1) \oplus L^q(\Omega_2, \mu_2) \ .$$

A partir de là, on peut construire des classes d'Orlicz caractérisables.

PROBLEME. - Quelles sont les classes d'espaces d'Orlicz caractérisables ou possédant la propriété de finitude ?

Pour l'étude de ce type de problèmes, on utilise largement les techniques de décomposition des espaces de Banach réticulés qui s'associent bien à celles des ultraproduits.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BANACH. - Théorie des opérations linéaires. Chelsea New-York (1955).

[2] GROTHENDIECK. - Memoirs of Amer. Math. Soc. N° 16 (1955).

[3] KAKUTANI. - Annals of Math. 42-1941, p. 523-537.

[4] KRASNOSELSKII et RUTICKI. - Convex functions and Orlicz spaces. Noordhoff 1961.

[5] LINDENSTRAUSS et PELCZYNSKI. - Absolutely summing operators in ${}_p$ spaces and their applications. Studia Matematica.

[6] SCHREIBER (Michel). - Ultraproduits pour des espaces non localement convexes (à paraître).

[7] BRETAGNOLLE, DACUNHA-CASTELLE, KRIVINE. - Lois stables et espaces L^p . Annales Inst. H. Poincaré - 2, N° 3, 1966, p. 251-259.

[8] DACUNHA-CASTELLE, KRIVINE. - Applications des ultraproduits aux espaces d'Orlicz. Notes C. R. Acad. Sc. Paris A 271, p. 987-989 (1970).

[9] DACUNHA-CASTELLE, KRIVINE. - Application des ultraproduits à la géométrie de certains espaces de Banach (à paraître Studia Mathematica 1971 (fin)).

Université de Paris-Sud
U.E.R. de Mathématiques
Bâtiment 425
91 - ORSAY (France)