Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

D. Dacunha-Castelle

Ultraproduits d'espaces L^p et d'espaces d'Orlicz

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 10, p. 1-9.

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A10_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 1 - 1 9 7 2

ULTRAPRODUITS D'ESPACES L^p ET D'ESPACES D'ORLICZ

par D. DACUNHA-CASTELLE

Exposé N° X

15 Décembre 1971

<u>Définition 1</u> : Soit B, C, C' des espaces de Banach, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ des classes d'espaces de Banach et λ un nombre ≥ 1.
On dit qu'il existe un λ-plongement de B dans C, noté $B \overset{\lambda}{\rightarrow} C$, s'il existe un λ-isomorphisme de B sur un sous-espace de C.
Il existe un λ-plongement de B dans $\mathcal{C}$ noté $B \overset{\lambda}{\rightarrow} \mathcal{C}$, s'il existe $C \in \mathcal{C}$ avec $B \overset{\lambda}{\rightarrow} C$.
Il existe un λ-plongement de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ si pour tout $C \in \mathcal{C}$, il existe $C' \in \mathcal{C}$ avec $C \overset{\lambda}{\rightarrow} C'$. Ceci se note $\mathcal{C} \overset{\lambda}{\rightarrow} \mathcal{C}'$.
S'il existe $\lambda \geq 1$ avec $\mathcal{C} \overset{\lambda}{\rightarrow} \mathcal{C}'$, la dimension de Banach (dimension linéaire) pour les isomorphismes de $\mathcal{C}$ est dite inférieure à celle de $\mathcal{C}'$, ce que l'on note :

$$\dim \mathcal{C} \leq \dim \mathcal{C}'.$$

<u>Définition 2</u> : Un espace de Banach C (resp. une classe de Banach $\mathcal{C}$) est dite avoir la propriété de λ-finitude si pour tout Banach B, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
1 - $B \overset{\lambda}{\rightarrow} C$; (resp. $B \overset{\lambda}{\rightarrow} \mathcal{C}$).
2 - $B_F \overset{\lambda}{\rightarrow} C$, pour tout sous-espace B_F de dimension finie de B; (resp. $B_F \overset{\lambda}{\rightarrow} \mathcal{C}$).

<u>Théorème 1</u> : Soit $\mathcal{C}$ une classe de Banach, stable par ultraproduit, sous-espace, et isométries. Alors $\mathcal{C}$ a la propriété de λ-finitude pour tout $\lambda \geq 1$.

<u>Démonstration</u> : Cela résulte immédiatement de la proposition 2 de l'exposé précédent.

<u>Proposition 2</u> : Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces de Banach réticulés. Alors $\pi_{i\in I} B_i/\mathfrak{U}$ est un espace de Banach réticulé pour l'ordre : $(f_i)_{i\in I} \geq (g_i)_{i\in I}$ si et seulement si $\{i, f_i \geq g_i\} \in \mathfrak{U}$. (cf. [2] pour les détails de la démonstration).
Remarquons que toute classe d'espace de Banach réticulés, stable par ultraproduit, isométrie et sous-espace de Banach réticulé se caractérise par des conditions du type de celles indiquées au théorème 3 de l exposé

précédent mais faisant intervenir les termes du "langage" des Banach réticulés (c'est-à-dire le symbole $\cup$ ou le symbole $|\ \ |$). Nous n'énoncerons pas ici le théorème 3 pour les Banach réticulés, nous contentant de l'exemple important suivant des L^p.

Exemple :

La classe des espaces L^p est stable par sous-espace réticulé. En effet, il est bien connu qu'un sous-espace réticulé de $L^p(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, \mu)$ est du type $L^p(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mu)$ où $\mathfrak{B}$ est une sous-σ-algèbre de $\mathcal{A}$. On sait donc par avance que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1 - L^p est stable par ultraproduit.

2 - L^p admet une caractérisation.

Dans ce cas particulier, on connait la caractérisation de L^p, dite de Nakano, à savoir

$$\forall x, \forall y\ [x \geq 0,\ y \geq 0 \Rightarrow (\|x \cup y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p \leq \|x + y\|^p) \qquad (1)$$

Il est élémentaire de vérifier que si une classe $\mathcal{C}$ vérifie (1) alors tout ultraproduit d'éléments de $\mathcal{C}$ vérifie aussi (1). Donc, la caractérisation de Nakano implique la stabilité de L^p par ultraproduit [cf. [1]]; (toute démonstration de l existence d'une caractérisation pour la classe de Banach SL^p paraît passer par l'étude de la classe de Banach réticulés L^p).

Remarquons que les formules du théorème 3 qui caractérisent SL^p peuvent être simplifiées, en tenant compte, pour $p > 1$ de la convexité uniforme des espaces SL^p.

Cependant les formes les plus simples de caractérisation (par exemple, pour $1 \leq p \leq 2$ $\|x\|^p$ est de type négatif, soit $\sum_{i,j}\|x_i - x_j\|^p \rho_i \rho_j < 0$, pour $\tilde{\sum}_{i=1} \rho_i = 0$) nécessitent la transformation de Fourier.

La caractérisation de Nakano, comme les applications qui suivent aux espaces d'Orlicz, sont fondées sur le résultat suivant concernant les R-espaces réticulés dont nous donnons dans [2] la démonstration.

Théorème 3 : Soit B un espace normé $\mathbb{R}$-réticulé satisfaisant à :

1 - $\| |x| \| = \|x\|$.

2 - L'application $x \to \|x\|$ de $B \to \mathbb{R}^+$ est strictement croissante.

3 - Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments ≥ 0, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Alors si $\mathfrak{B}$ est une algèbre de Boole d'éléments positifs de B vérifiant :

1' - Si $e \in \mathfrak{B}$, $u \in B$ alors $(e - u) \cap u = 0 \Rightarrow u \in \mathfrak{B}$

2' - Pour tout $u \in B$, il existe $e \in \mathfrak{B}$ avec $e \cap u \neq 0$.

Sous ces hypothèses, l'espace vectoriel $\mathcal{V}(\mathcal{B})$ engendré par $\mathfrak{B}$ est partout dense dans B.

Enfin pour tout espace B, vérifiant 1, 2, 3, on peut trouver une algèbre de Boole $\mathcal{B}$ vérifiant 1', 2'.

Nous allons appliquer ce résultat au calcul d'ultraproduits de certains espaces d'Orlicz.

Définition : Soit F une fonction convexe

$$F : [0,\infty] \to [0,\infty]$$
$$F(0) = 0, \; F(\infty) = \infty.$$

On supposera dans la suite que F satisfait la condition Δ_2 suivante : Il existe k tel que $F(2x) \leq kF(x)$. (La théorie des ultraproduits d'espaces où F ne satisfait pas Δ_2, ne paraît pas intéressante, et ne l'est pas du point de vue de la dimension linéaire introduite ci-dessous, car triviale).

L'espace $L_F(\mathcal{X},\mu)$ des classes de fonctions f μ-mesurables sur un espace mesuré $(\mathcal{X},\mu)$ qui satisfait en outre : $\int_{\mathcal{X}} F(|f|)d\mu < \infty$ est dit espace d'Orlicz.

On le dote par exemple de la norme

$$\|f\|_F = \inf \{\theta, \int_{\mathcal{X}} F(\frac{f}{|\theta|}) \, d\mu \leq 1\}$$

et on pose $\Phi(f) = \int_{\mathcal{X}} F(|f|d\mu$.

<u>Remarques</u> :

1 - Il existe des fonctions numériques ϕ_1 et ϕ_2 (dépendant évidemment de F) telles que $\phi_1(\|f\|) \leq \Phi(f) \leq \phi_2(\|f\|)$ avec ϕ_1, ϕ_2 croissantes sur $\mathbb{R}^+$, de 0 à l'∞. (cf. [2]). Cette remarque sera utilisée implicitement dans la suite.

2 - On écrit $F \sim G$ s'il existe des constantes $0 < a,b,m,M < \infty$, telles que

$$(1) \quad m \leq \frac{F(ax)}{G(ax)} \leq M$$

pour tout $x > 0$. Si $F \sim G$ alors L_F et L_G sont isomorphes.
S'il existe x_0 tel que (1) soit vérifié pour $x > x_0$ on écrit $F \overset{\infty}{\sim} G$. Si de plus $\mu(\mathcal{X}) < \infty$, les espaces L_F et L_G sont λ-isomorphes pour un certain λ. On notera L_F^K un espace $L_F(\mathcal{X},\mu)$ tel que $\mu(\mathcal{X}) < \infty$.
De la même manière, on notera $l_F(\mathcal{X})$ l'espace des familles de réels indexées par $\mathcal{X}$, et F-sommables. S'il existe x_0 tel que (1) soit vraie pour $x < x_0$, alors $l_F(\mathcal{X})$ et $l_G(\mathcal{X})$ sont isomorphes, pour tout $\mathcal{X}$.

Nous allons maintenant calculer, à titre d'exemple, les ultrapuissances $B = (\mathbb{L}_F^K)^{I/\mathfrak{U}}$ de l'espace $L_F[(0,1),dx]$ noté $\mathbb{L}_F^K$ dans la suite pour simplifier. Considérons d'abord les éléments du type $(1_{A_i})_{i\in I}$, où A_i est un borélien de $(0,1)$. Soit :

$$\mathcal{B}_0 = \{(1_{A_i})_{i\in I},\ A_i \text{ borélien de } (0,1)\}.$$

Posons pour $(f_i)_{i\in I} \in B$

$$\Phi((f_i)_{i\in I}) = \lim_{\mathfrak{U}} \Phi(f_i)$$

et pour $(1_{A_i})_{i\in I} \in \mathcal{B}_0$, posons

$$\mu((1_{A_i})_{i\in I}) = \Phi((1_{A_i})_{i\in I}).$$

Alors μ définit sur $\underset{\smile}{\mathfrak{B}}_0$ une mesure σ-additive, de masse 1. Et, par le théorème de Stone, $\underset{\smile}{\mathfrak{B}}_0$ est identifiée à une algèbre de parties d'un ensemble. Soit $V(\mathfrak{B}_0)$ le sous-espace de B engendré par $\underset{\smile}{\mathfrak{B}}_0$, c'est-à-dire l'espace des fonctions $\mathcal{B}_0$-étagées.
Comme $\Phi(\lambda(1_{A_i})_{i\in I}) = F(\lambda)\ \mu((1_{A_i})_{i\in I})$ il est clair que le complété de $V(\mathfrak{B}_0)$ pour la norme de B n'est autre que l'espace $L_F^{K'}(\underset{\smile}{\mathcal{B}}_0,\mu)$, que l'on peut écrire de manière plus concrète :

$$L_\Gamma^K([(0,1),dx]^{I/\mathfrak{U}}), \qquad\qquad [(0,1),dx]^{I/\mathfrak{U}}$$

représentant l'ultrapuissance de l'espace mesuré $[(0,1),dx]$, en un sens facile à définir.
On peut donc écrire

$$B = L_F^K(\underset{\smile}{\mathfrak{B}}_0,\mu) + B_1$$

où B_1 est l espace des éléments étrangers à B_0.
Les éléments de B_1 sont donc tels que

$$\lim_{\mathfrak{U}} \| (f_i)_{i\in I} \cap M(1_{A_i})_{i\in I} \| = 0$$

pour tout $M \in \mathbb{R}^+$, tout élément $(1_{A_i})_{i\in I}$ de $\underset{\smile}{\mathcal{B}}_0$.
Comme $\|(f_i)_{i\in I}\| \to 0 \Leftrightarrow \phi\ ((f_i)_{i\in I}) \to 0$, on a

$$\lim_{\mathfrak{U}} \int_{(|f_i| \le M)} F(|f_i(x)|)dx = 0$$

L'identification de B_1 en tant qu'espace fonctionnel est un problème non résolu dans le cas général. Nous ne connaissons la forme de B_1 que dans des cas particuliers, ou lorsque l'on a une bonne interprétation probabiliste. Comme cas particulier simple, prenons $F(x) = x^p L(x)$ avec

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1$ pour tout $\lambda > 0$.

(L est une fonction à variation lente).

D'après le théorème 2, il existe une σ-algèbre d'éléments de B_1, soit $\mathfrak{B}_1$ telle que l'espace $\mathbf{V}(\mathfrak{B}_1)$, engendré par $\mathfrak{B}_1$ soit dense dans B_1.

On définit comme précédemment une mesure ν sur $\mathcal{B}_1$, en posant

$$\nu((f_i)_{i\in I}) = \Phi\ ((f_i)_{i\in I})$$

pour tout $(f_i)_{i\in I} \in \mathfrak{B}_1$.

Pour pouvoir identifier B_1, calculons $\Phi\ (\lambda(f_i)_{i\in I})$ lorsque $(f_i)_{i\in I} \in \mathfrak{B}_1$.

Soit $\lambda > 0$ fixé, $\varepsilon > 0$ fixé et choisissons M tel que

$$x > M \Rightarrow \left|\frac{L(\lambda x)}{L(x)} - 1\right| < \varepsilon.$$

On a

$$\lim_{\mathfrak{U}} \int_{\{|f_i| < M\}} F(|f_i(x)|)dx = 0$$

et donc

$$\Phi\ (\lambda(f_i)_{i\in I}) = \lim_{\mathfrak{U}} \int_{\{|f_i| \geq M\}} F(\lambda|f_i(x)|)dx$$

Mais

$$\int_{\{|f_i|\geq M\}} [|F(\lambda|f_i(x)|) - \lambda^p F(f_i)|]dx$$

$$= \lambda^p \int_{|f_i|\geq M} F(|f_i|)\ \left|1 - \frac{L(\lambda|f_i|)}{L(|f_i|)}\right|\ dx$$

$$\leq \varepsilon\lambda P \int_0^1 F(|f_i|)dx.$$

Comme ε est arbitraire, on a donc :

$$\Phi\,(\lambda(f_i)_{i\in I}) = \lambda^p\ \nu((f_i)_{i\in I});$$

On en déduit aisément que B_1 est isométrique à $L^p(\mathfrak{B}_1,\nu)$ et que

$$B = L_F^K\ (\mathfrak{B}_o,\mu) + L^p(\mathfrak{B}_1,\nu),$$

tout élément de B s'écrivant alors $u = v + \omega$, avec

$$\|u\|_B = \inf\ \{\theta,\ \int F(\tfrac{|v|}{\theta})d\mu + \int \frac{\omega^p}{\theta^p}\,d\nu \le 1\}$$

Pour terminer, représentons L^2 comme un espace gaussien $\mathcal{H}$, sous-espace de $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$, $(\Omega,\mathcal{A},P)$ espace de probabilité. Il est alors trivial que $\mathcal{H}$ est isométrique à un sous-espace de $L_F\ (\Omega,\mathcal{A},P)$ quelque soit F.
Prenons $F(x) = x^2L(x)$ et appliquons le résultat précédent.
On a une décomposition $B = L_F^K + L^2$, soit $u = v + w$ la décomposition d'un élément, on a

$$\|u\|_B = \inf\ \{\theta,\ \int F(|\tfrac{v}{\theta}|)d\mu + \int F\ |\tfrac{\omega}{\theta}|d\nu \le 1\}$$

(ω est gausienne centrée) et donc B est isométrique à un sous-espace de L_F^K muni de sa norme naturelle (remarquons qu'en modifiant un peu la démonstration, on peut choisir L^2 isomorphe à un sous-espace complémenté de L_F^K) d'où :

<u>Proposition</u> : Les classes $SL^K_{x^2L(x)}$ sont stables par sous-espace, isométrie et ultraproduit et admettent donc une caractérisation. De plus elles satisfont la propriété de finitude. On est amené à faire les conjectures suivantes :

1 - Toute classe SL_F^K est stable par ultraproduit.

2 - Soit $UP(SL_F^K)$ la classe des ultraproduits d'éléments de SL_F^K.

Soit L_G un espace d'Orlicz.

Conjecture : les deux conditions suivantes sont équivalentes

1 - $\mathrm{Dim}\ L_G \le \mathrm{Dim}\ L_F^K$

2 - $L_G \in UP(SL_F^K)$.

Les résultats probabilistes obtenus dans [3] et [4] concernant les dimensions linéaires respectives des espaces L^p, L_F et L_G, et d'autres résultats probabilistes concernant les espaces d'Orlicz de suites nous ont amené à cette conjecture.

Pour terminer, indiquons quelques directions possibles d'extension des méthodes utilisées. Il n'y a pas de difficulté à définir l'ultraproduit pour les structures suivantes :

1 - E.V.T.L.C. munis d'une famille dénombrable $\| \ \|_n$ de semi-normes.

2 - Algèbres de Banach.

3 - Triplets (E,F,T), E,F Banach T opérateur borné : $E \to F$.

4 - Paires (E,T), T opérateur borné dans le Banach E.

5 - E.V.T métriques

6 - Espaces métriques etc...

A chaque structure $\mathcal{L}$, on doit associer les sous-structures $S\mathcal{L}$ et les sous-structures finiment engendrées Fin $(S\mathcal{L})$, plus une notion convenable d'isométrie.

Le théorème général s'énonce alors ainsi :

Toute classe $\mathcal{C}$ de structures $\mathcal{L}$ qui est stable par sous-structure, isométrie et ultraproduit admet une caractérisation en termes de sous-structures finiment engendrées (caractérisation qu'il est facile d'écrire sous une forme comparable à celle du théorème 3 de l'exposé précédent).

Exemples :

1 - Soit $\mathcal{D}(0,1)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur $(0,1)$, nulles aux bords. Alors la classe $S[\mathcal{D}(0,1)]$ des sous-EVTLC de $\mathcal{D}(0,1)$ est stable par ultraproduit.

Problème : Définissant $\mathcal{D}(0,1)$ par les semi-normes $\|f\|_n^2 = \int_0^1 |f^{(n)}(x)|^2 dx$, trouver la caractérisation de $S[\mathcal{D}(0,1)]$.

2 - Soit T un opérateur compact sur un espace d'Hilbert. Alors la classe $S(H,T)$ des restrictions de T aux sous-espaces T-invariants est stable par ultraproduit [6].

Problème : Le résultat est-il vrai pour L^p?

3 - Les classes l_F F donnée, d'algèbres de Banach sont stables par ultraproduit [2].

4 - Les classe SL^p des sous-espaces d'espaces L^p, p donné, $0 \leq p < 1$ sont stables par ultraproduit [7].

5 - Considérons des triplets (E,F,T). Supposons qu'ils forment un idéal normé d'opérateurs au sens de Pietsch ([5]). Alors si cet idéal est stable par ultraproduit, il est maximal au sens de [5]. En particulier l'idéal des opérateurs se factorisant par L^p est maximal. et ceci vaut pour toute classe d'opérateurs se factorisant à travers une classe, elle-même stable par ultraproduit.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRETAGNOLLE, DACUNHA-CASTELLE, KRIVINE; Lois stables et espaces L^p. Annales IHP (1966) p.231-266.

[2] DACUNHA-CASTELLE, KRIVINE; Studia Math. à paraître.

[3] BRETAGNOLLE, DACUNHA-CASTELLE; Formes linéaires aléatoires et plongements dans les Banach. Annales ENS, 1969.

[4] BRETAGNOLLE, DACUNHA-CASTELLE; Suite de l'article précédent (à paraître)

[5] S. KWAPIEN; Operators factorizing through L^p spaces. (à paraître)

[6] E. LESQUOY; Ultraproduits d'opérateurs sur les Hilberts (à paraître)

[7] M. SCHREIBER; Ultraproduits d'espaces L^p, $0 \leq p < 1$. A paraître (Annales IHP).