JEAN BRETAGNOLLE
DIDIER DACUNHA CASTELLE
JEAN-LOUIS KRIVINE

Lois stables et espaces L^p

Annales de l'I. H. P., section B, tome 2, nº 3 (1966), p. 231-259.
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1966__2_3_231_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. II, n° 3, 1966, p. 231-259.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Lois stables et espaces L^p

par

Jean BRETAGNOLLE, Didier DACUNHA CASTELLE
et Jean-Louis KRIVINE

I. — INTRODUCTION

Dans cet article, nous nous proposons d'étudier les fonctions de type positif (et négatif) sur les espaces de la forme $L^p(E, \mu)$, ainsi que certaines classes de fonctions aléatoires.

Rappelons d'abord les définitions et résultats suivants dus à Schoenberg [*1*].

T étant un ensemble quelconque, une application f de $T \times T$ dans R est dite de type positif sur T si

(1) $$f(t, t') = f(t', t)\ ; \quad \forall t, t' \in T,$$

(2) $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(t_i, t_j)\rho_i\rho_j \geqslant 0, \ \forall n, \ \forall \rho_i \in R, \ \forall t_i \in T.$$

Une application Φ de $T \times T$ dans R est dite de type négatif si

(1) $$\Phi(t, t') = \Phi(t', t)\ ; \quad \Phi(t, t) = 0.$$

(2) $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Phi(t_i, t_j)\rho_i\rho_j \geqslant 0, \ \forall n, \ \forall t_i \in T.$$

$$\forall \rho_i \in R \qquad \text{avec} \qquad \sum_{i=1}^{n} \rho_i = 0,$$

Φ est donc positive.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° Φ est de type négatif;

2° $e^{-\lambda\Phi}$ est de type positif, $\forall\lambda > 0$, $\Phi(t, t) = 0$, $\forall t \in \mathrm{T}$;

3° $\sqrt{\Phi}$ est une distance hilbertienne, c'est-à-dire que $(\mathrm{T}, \sqrt{\Phi})$ est un espace métrique isomorphe à une partie d'un espace de Hilbert.

Enfin, si Φ est de type négatif, si μ est une mesure positive sur R^+, telle que $\int_0^\infty \left(1 \cap \frac{1}{x}\right)\mu(dx) < \infty$ alors $\int_0^\infty \frac{1 - e^{-x\Phi}}{x}\mu(dx)$ est de type négatif; en particulier Φ^α est de type négatif si $0 < \alpha \leqslant 1$.

Dans l'article [*1*] Schoenberg a caractérisé les fonctions continues $f : \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}$, telles que $f(\| x - y \|)$ soit de type positif sur un espace de Hilbert de dimension infinie. Dans la partie I nous étudions ce problème pour les espaces $\mathrm{L}^p(\mathrm{E}, \mu)$ de dimension infinie, $0 < p \leqslant \infty$ (théorème I).

Dans la partie II, nous montrons qu'un espace normé Z est un sous-espace d'un espace $\mathrm{L}^p(\mathrm{E}, \mu)$ si et seulement si $\| x - y \|^p$ est de type négatif sur Z (avec $1 \leqslant p \leqslant 2$).

Dans la partie III nous étudions d'abord la forme générale des fonctions aléatoires stables sur un ensemble T, puis sur R.

Nous terminons par une généralisation du théorème de Paul Lévy concernant le déterminisme de la fonction brownienne sur l'espace de Hilbert [2].

PREMIÈRE PARTIE

FONCTIONS DE TYPE POSITIF SUR $\mathrm{L}^p(\mathrm{E}, \mu)$ $0 < p \leqslant \infty$

THÉORÈME 1. — *Soit* (E, μ) *un espace mesuré tel que* $\mathrm{L}^p(\mathrm{E}, \mu)$ *soit de dimension infinie* $(0 < p \leqslant \infty)$. *Pour que* $f(\| x - y \|_p)$ *soit de type positif sur* $\mathrm{L}^p(\mathrm{E}, \mu)$, *$f$ étant une fonction continue :* $\mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}$ *telle que* $f(0) = 1$, *il faut et il suffit que*

$$f \equiv 1 \quad \text{si} \quad p > 2$$

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-ux^p}\sigma(du) \text{ si } p \leqslant 2, \ \sigma \text{ étant une probabilité sur } \mathrm{R}^+.$$

Pour que $\mathrm{F}(\| x - y \|_p)$ *soit de type négatif sur* $\mathrm{L}^p(\mathrm{E}, \mu)$, F *étant une* *fonction continue :* $R^+ \to R^+$ *telle que* $F(0) = 0$, *il faut et il suffit que*

$$F \equiv 0 \quad \text{si} \quad p > 2$$

$F(x) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ux^p}}{u} \tau(du)$ *si* $p \leqslant 2$, τ *étant une mesure* $\geqslant 0$ *sur* $[0, \infty[$ *telle que* $\int_0^\infty \left(1 \cap \frac{1}{u}\right)\tau(du) < \infty$.

La condition est suffisante : on suppose $p \leqslant 2$. Comme $(x-y)^2$ est de type négatif sur R (c'est le carré d'une distance hilbertienne) $|x-y|^p$ l'est aussi. On en déduit que $\| x - y \|_p^p$ est de type négatif sur $L^p(E, \mu)$: si

$$x_1, \ldots, x_n \in L^p(E, \mu) \quad \text{et} \quad \rho_1, \ldots, \rho_n \in R$$

avec

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i = 0$$

on a

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \| x_i - x_j \|_p^p \rho_i\rho_j = \int_E \Big(\sum_{i,j} | x_i(\omega) - x_j(\omega) |^p \rho_i\rho_j\mu(d\omega) \leqslant 0.$$

Donc $\int_0^\infty \frac{1 - e^{-u\|x-y\|_p^p}}{u} \tau(du)$ est aussi de type négatif sur $L^p(E, \mu)$ et $e^{-u\|x-y\|_p^p}$ est de type positif pour chaque $u \geqslant 0$ donc aussi

$$\int_0^\infty e^{-u\|x-y\|_p^p}\sigma(du).$$

La condition est nécessaire : comme $L^p(E, \mu)$ est de dimension infinie il contient un sous-espace V qui est isomorphe à $l^p = L^p(N)$ en tant qu'espace normé : on peut en effet choisir une suite A_n ($n = 1, 2, \ldots$) de sous-ensembles disjoints non négligeables de E, et on définit une isométrie J de l^p dans $L^p(E, \mu)$ en posant

$$J(a_1, \ldots, a_n, \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\mu(A_i)^{-\frac{1}{p}} 1_{A_i}$$

pour toute suite $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ de nombres réels telle que $\sum_{i=1}^{\infty} | a_i |^p < \infty$ (1_{A_i} désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A_i).

On voit donc qu'il suffit de démontrer le théorème pour l^p : si $f(\| x - y \|_p)$

(resp. $F(\| x - y \|_p)$) est de type positif (resp. négatif) sur $L^p(E, \mu)$, elle est de type positif (resp. négatif) sur V donc sur l^p.

On suppose donc dans la suite que $E = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, μ étant la masse unité sur chaque entier. Soit f une fonction continue de R^+ dans R telle que $f(\| x - y \|_p)$ soit de type positif sur l^p, avec $f(0) = 1$.

On pose

$$\begin{aligned} \Phi_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) &= f\left([\,|\xi_1|^p + \ldots + |\xi_n|^p]^{\frac{1}{p}}\right) \quad \text{si } p < \infty, \\ &= f([\,|\xi_1| \cup \ldots \cup |\xi_n|\,]) \quad \text{si } p = \infty. \end{aligned}$$

Alors Φ_n est une fonction de type positif sur R^n telle que $\Phi_n(0, 0, \ldots, 0) = 1$ donc c'est la transformée de Fourier d'une probabilité P_n sur R^n; comme $\Phi_{n+1}(\xi_1, \ldots, \xi_n, 0) = \Phi_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, les P_n sont compatibles et il existe d'après le théorème de Kolmogoroff, une suite $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ de variables aléatoires réelles, sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que

$$\Phi_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) = E\left(e^{i(\xi_1 X_1 + \ldots + \xi_n X_n)}\right).$$

D'après sa définition Φ_n est une fonction symétrique des variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$. L'égalité ci-dessus montre donc que la suite (X_i) est en dépendance symétrique. Il existe donc (cf. [*4*], p. 136) une σ-algèbre $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ par rapport à laquelle les X_i soient conditionnellement indépendantes et équidistribuées (c'est la σ-algèbre des événements dépendant « symétriquement » des X_i). Désignons par $P(\omega, dx)$ une probabilité conditionnelle régulière pour X_1 par rapport à $\mathcal{B}$ (sur l'existence d'une telle probabilité voir [*9*], p. 361). On a alors :

$$E^{\mathcal{B}}\left(e^{i\xi X_r}\right) = E^{\mathcal{B}}(e^{i\xi X_1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} P(\omega, dx) = \varphi_\omega(\xi)$$

pour chaque entier $r > 0$ (la première égalité exprime le fait que X_r et X_1 sont conditionnellement équidistribuées par rapport à $\mathcal{B}$); φ_ω est donc presque sûrement une fonction caractéristique. Comme $X_1, \ldots, X_n$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathcal{B}$, on a :

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{B}}\left(e^{i(\xi_1 X_1 + \ldots + \xi_n X_n)}\right) &= \prod_{r=1}^{n} E^{\mathcal{B}}\left(e^{i\xi_r X_r}\right) \\ &= \prod_{r=1}^{n} \varphi_\omega(\xi_r). \end{aligned}$$

En prenant l'espérance des deux membres on trouve :

$$E\left(e^{i(\xi_1 X_1 + \ldots + \xi_n X_n)}\right) = E\left(\prod_{r=1}^{n} \varphi_\omega(\xi_r)\right),$$

c'est-à-dire :

$$\Phi_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \mathrm{E}\Big(\prod_{r=1}^{n} \varphi_\omega(\xi_r)\Big) \quad (*).$$

Soit ξ un nombre réel $\geqslant 0$; d'après $(*)$ on a

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\varphi_\omega(\xi) - \varphi_\omega(-\xi)]^2 &= \mathrm{E}[\varphi_\omega^2(\xi)] + \mathrm{E}[\varphi_\omega^2(-\xi)] - 2\mathrm{E}[\varphi_\omega(\xi)\varphi_\omega(-\xi)] \\ &= \Phi_2(\xi, \xi) + \Phi_2(-\xi, -\xi) - 2\Phi_2(\xi, -\xi) = 0\end{aligned}$$

puisque, d'après la définition de Φ_2, on a

$$\Phi_2(\xi, \xi) = \Phi_2(\xi, -\xi) = \Phi_2(-\xi, -\xi).$$

Or φ_ω est une fonction caractéristique presque sûrement, donc $\varphi_\omega(\xi) - \varphi_\omega(-\xi)$ est presque sûrement purement imaginaire. On en déduit que $\varphi_\omega(\xi) = \varphi_\omega(-\xi)$ presque sûrement. En faisant décrire à ξ l'ensemble des rationnels $\geqslant 0$, et en remarquant que φ_ω est presque sûrement continue, on voit que φ_ω est presque sûrement paire, donc presque sûrement réelle (car c'est une fonction caractéristique).

Soient ξ, η deux nombres réels $\geqslant 0$. D'après $(*)$ on a si $p < \infty$:

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\Big(\Big[\varphi_\omega[(\xi+\eta)^{1/p}] - \varphi_\omega\Big(\xi^{\frac{1}{p}}\Big)\varphi_\omega\Big(\eta^{\frac{1}{p}}\Big)\Big]^2\Big) \\ &= \mathrm{E}\Big[\varphi_\omega^2[(\xi+\eta)^{1/p}]\Big] - 2\mathrm{E}\Big[\varphi_\omega[(\xi+\eta)^{1/p}]\varphi_\omega\Big(\xi^{\frac{1}{p}}\Big)\varphi_\omega\Big(\eta^{\frac{1}{p}}\Big)\Big] + \mathrm{E}\Big[\varphi_\omega^2\Big(\xi^{\frac{1}{p}}\Big)\varphi_\omega^2\Big(\eta^{\frac{1}{p}}\Big)\Big] \\ &= \Phi_2[(\xi+\eta)^{1/p}, (\xi+\eta)^{1/p}] - 2\Phi_3\Big[(\xi+\eta)^{1/p}, \xi^{\frac{1}{p}}, \eta^{\frac{1}{p}}\Big] \\ &\qquad + \Phi_4\Big[\xi^{\frac{1}{p}}, \xi^{\frac{1}{p}}, \eta^{\frac{1}{p}}, \eta^{\frac{1}{p}}\Big] = 0\end{aligned}$$

puisque d'après les définitions de Φ_2, Φ_3, Φ_4 on a :

$$\Phi_2[(\xi+\eta)^{1/p}, (\xi+\eta)^{1/p}] = \Phi_3\Big[(\xi+\eta)^{1/p}, \xi^{\frac{1}{p}}, \eta^{\frac{1}{p}}\Big] = \Phi_4\Big[\xi^{\frac{1}{p}}, \xi^{\frac{1}{p}}, \eta^{\frac{1}{p}}, \eta^{\frac{1}{p}}\Big].$$

On a donc presque sûrement :

$$\varphi_\omega[(\xi+\eta)^{1/p}] = \varphi_\omega\Big(\xi^{\frac{1}{p}}\Big)\varphi_\omega\Big(\eta^{\frac{1}{p}}\Big).$$

Cette relation est donc vraie presque sûrement simultanément pour tous les couples ξ, η de rationnels $\geqslant 0$. Comme φ_ω est presque sûrement une fonction caractéristique, elle est presque sûrement continue, donc d'après la relation ci-dessus elle est presque sûrement de la forme : $\varphi_\omega(x) = e^{-a(\omega)|x|^p}$ où $a(\omega)$ est une fonction réelle définie sur Ω.

Si $p > 2$, $e^{-a|x|^p}$ n'est une fonction caractéristique que si $a = 0$. Donc $\varphi_\omega \equiv 1$ presque sûrement et, par suite, $f(\xi) = \Phi_1(\xi) = \mathrm{E}[\varphi_\omega(\xi)] = 1$.

Si $p \leqslant 2$, on a $a(\omega) = \lim_{\xi \downarrow 0} [1 - \varphi_\omega(\xi)]\xi^{-p}$. Or, pour chaque ξ, $\varphi_\omega(\xi)$ est une fonction mesurable de ω (car $\varphi_\omega(\xi) = E^{\mathcal{B}}(e^{i\xi X_1})$). Il en résulte que $a(\omega)$ est une variable aléatoire réelle $\geqslant 0$; soit σ sa répartition. On a

$$f(\xi) = \Phi_1(\xi) = E[\varphi_\omega(\xi)] = E[e^{-a(\omega)\xi^p}] = \int_0^\infty e^{-u\xi^p}\sigma(du).$$

Si $p = \infty$, on a

$$E([\varphi_\omega(\xi) - \varphi_\omega^2(\xi)]^2) = \Phi_2(\xi, \xi) - 2\Phi_3(\xi, \xi, \xi) + \Phi_4(\xi, \xi, \xi, \xi),$$

d'après $(*)$. Or d'après les définitions de Φ_2, Φ_3, Φ_4 on a

$$\Phi_2(\xi, \xi) = \Phi_3(\xi, \xi, \xi) = \Phi_4(\xi, \xi, \xi, \xi).$$

Donc $E[\varphi_\omega(\xi) - \varphi_\omega^2(\xi)]^2 = 0$ et par suite $\varphi_\omega(\xi) = \varphi_\omega^2(\xi)$ presque sûrement. Donc $\varphi_\omega(\xi) = 0$ ou 1 presque sûrement. Comme φ_ω est une fonction caractéristique on a $\varphi_\omega \equiv 1$ presque sûrement et donc

$$f(\xi) = \Phi_1(\xi) = E[\varphi_\omega(\xi)] = 1.$$

Soit maintenant F une fonction continue définie sur R^+ à valeurs dans R^+, telle que $F(\| x - y \|_p)$ soit de type négatif sur l^p. Alors $e^{-F(\|x-y\|_p)}$ est de type positif sur l^p. Par suite si $p > 2$, on a $F \equiv 0$.

Supposons alors $0 < p \leqslant 2$. Montrons d'abord le lemme suivant :

Soit $\Psi_n(x) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ux}}{u} \tau_n(du)$, *où* τ_n *est une mesure* $\geqslant 0$ *sur* R^+ *telle que* $\int_0^\infty \left(1 \cap \frac{1}{u}\right)\tau_n(du) < \infty$. *Si* $\Psi_n(x) \to \Psi(x)$ *pour chaque* $x \in R^+$ *et si* Ψ *est continue en* 0, *alors* $\Psi(x) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ux}}{u} \tau(du)$, τ *étant une mesure* $\geqslant 0$ *sur* R^+ *telle que* $\int_0^\infty \left(1 \cap \frac{1}{u}\right) \tau(du) < \infty$.

La suite $\nu_n = \frac{1 - e^{-u}}{u} \tau_n(du)$ est une suite de mesures de Radon $\geqslant 0$, sur $[0, \infty]$ de masses totales uniformément bornées, car

$$\int_0^\infty \nu_n(du) = \Psi_n(1) \to \Psi(1) \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

Donc elle a un point adhérent ν pour la topologie définie sur l'espace des mesures de Radon $\geqslant 0$ sur $[0, \infty]$ par les fonctions continues sur $[0, \infty]$.

Comme $\dfrac{1-e^{-au}}{1-e^{-u}}$ est une fonction continue sur $[0, \infty]$, et que ν_n n'a pas de masse sur le point ∞, on a :

$$\Psi_n(a) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-au}}{1-e^{-u}} \nu_n(du).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n arbitrairement grand tel que

$$\left| \int_0^\infty \frac{1-e^{-au}}{1-e^{-u}} \nu_n(du) - \int_0^\infty \frac{1-e^{-au}}{1-e^{-u}} \nu(du) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Cela montre que

$$\Psi(a) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-au}}{1-e^{-u}} \nu(du), \text{ pour chaque } a \geqslant 0.$$

Si ν avait une masse ν_0 sur le point ∞, on aurait $\Psi(a) \geqslant \nu_0$ pour tout $a > 0$ et $\Psi(0) = 0$ ce qui est impossible puisque Ψ est continue en 0.

Donc ν n'a pas de masse sur le point ∞, et on a

$$\Psi(a) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-au}}{u} \tau(du)$$

où $\tau(du)$ est la mesure $\dfrac{u}{1-e^{-u}} \nu(du)$ sur R^+. Comme :

$$\Psi(1) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-u}}{u} \tau(du) < \infty, \quad \text{on a bien} \quad \int_0^\infty \left(1 \cap \frac{1}{u}\right) \tau(du) < \infty$$

ce qui démontre le lemme.

Comme $e^{-\lambda F(\|x-y\|_p)}$ est de type positif sur l^p ($p \leqslant 2$), il existe une probabilité σ_λ sur R^+ telle que $e^{-\lambda F(x)} = \int_0^\infty e^{-ux^p} \sigma_\lambda(du)$ pour tout $x \in R^+$. Donc :

$$\frac{1 - e^{-\lambda F\left(x^{\frac{1}{p}}\right)}}{\lambda} = \int_0^\infty \frac{1-e^{-ux}}{u} \tau_\lambda(du) \quad \text{où} \quad \tau_\lambda(du) = \frac{u}{\lambda} \sigma_\lambda(du).$$

En faisant tendre λ vers 0 et en appliquant le lemme précédent on voit qu'il existe une mesure $\tau \geqslant 0$ sur R^+ telle que

$$\int_0^\infty \left(1 \cap \frac{1}{u}\right) \tau(du) < \infty \text{ et telle que } F\left(x^{\frac{1}{p}}\right) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-ux}}{u} \tau(du). \text{ C. Q. F. D.}$$

DEUXIÈME PARTIE

CARACTÉRISATION DES SOUS-ESPACES D'UN ESPACE $L^p(E, \mu)$; $1 \leqslant p \leqslant 2$

Un espace vectoriel Z normé sur R sera dit de type p (p nombre réel $\geqslant 1$) s'il existe un espace mesuré (E, μ) et une application linéaire isométrique de Z dans $L^p(E, \mu)$.

Nous nous proposons de démontrer le

THÉORÈME 2. — *Pour qu'un espace vectoriel* Z *normé sur* R *soit de type* p, *avec* $1 \leqslant p \leqslant 2$, *il faut et il suffit que* $\| x - y \|^p$ *soit une fonction de type négatif sur* Z.

La condition est évidemment nécessaire puisque $\| x - y \|^p$ est de type négatif sur $L^p(E, \mu)$ quel que soit l'espace mesuré (E, μ), pour $1 \leqslant p \leqslant 2$.

LEMME 1. — *Soient* Z *un espace vectoriel et* ν *une application de* Z *dans* R^+, *telle que :*

1° $\nu(\lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_n t_n)$ *est continue en* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *quels que soient* $t_1, \dots, t_n \in Z$;

2° $\nu(\lambda t) = |\lambda| \nu(t)$ *pour tout* $\lambda \in R$, *et* $t \in Z$;

3° $[\nu(t - u)]^\alpha$ *est de type négatif sur* Z *pour un nombre réel* $\alpha > 0$ *et* $\leqslant 2$. *Alors pour tout* $\beta \in]0, \alpha[$ (*resp. pour tout* $\beta > 0$ *si* $\alpha = 2$), *il existe un espace de probabilité* (Ω, P) *et une application linéaire* $t \to X_t$ *de* Z *dans* $L^\beta(\Omega, P)$ *telle que* $\nu(t) = E(|X_t|^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ *pour tout* $t \in Z$.

Posons $f(t) = \exp\{-[\nu(t)]^\alpha\}$; si $t_1, \dots, t_n \in Z$, $f(\lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_n t_n)$ est de type positif sur R^n, donc est la transformée de Fourier d'une probabilité $P_{t_1 \dots t_n}$ sur R^n. Il est immédiat que les $P_{t_1 \dots t_n}$ sont compatibles quand $t_1, \dots, t_n$ décrit la famille des parties finies de Z. Il existe donc (théorème de Kolmogoroff) une famille Y_t ($t \in Z$) de variables aléatoires réelles sur un espace de probabilité (Ω, P), telle que

$$E\left(e^{i(\lambda_1 Y_{t_1} + \dots + \lambda_n Y_{t_n})}\right) = f(\lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_n t_n),$$

quels que soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in R$ et $t_1, \dots, t_n \in Z$. En particulier si $a, \lambda \in R$ et $t \in Z$:

$$E\left(e^{i\lambda(Y_{at} - aY_t)}\right) = f(\lambda(at) - (\lambda a)t) = 1.$$

Par suite $\lambda(Y_{at} - aY_t) = 0 \pmod{2\pi}$ p. s. Comme c'est vrai $\forall \lambda \in R$ on a p. s. :

$$Y_{at} = aY_t \text{ pour tout } a \text{ et tout } t.$$

De même on a :

$$E\left(e^{i\lambda(Y_{t+u}-Y_t-Y_u)}\right) = f(\lambda(t+u) - \lambda t - \lambda u) = 1.$$

Donc :

$$\lambda(Y_{t+u} - Y_t - Y_u) = 0 \pmod{2\pi} \text{ p. s. pour tout } \lambda \in R,$$

et donc p. s.

$$Y_{t+u} = Y_t + Y_u \qquad \text{pour tout } t, u.$$

L'application $t \to Y_t$ est donc linéaire. Pour chaque $t \in Z$ la loi de Y^t est donnée par

$$E\left(e^{i\lambda Y_t}\right) = e^{-(\nu(\lambda t))^\alpha} = e^{-|\lambda|^\alpha(\nu(t))^\alpha}.$$

Soit $\varphi_\alpha(x)dx$ la probabilité sur R dont la transformée de Fourier est $e^{-|\lambda|^\alpha}$. Pour $0 < \beta < \alpha$ (resp. pour tout $\beta > 0$ si $\alpha = 2$) on pose :

$$C_{\alpha,\beta} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\beta \varphi_\alpha(x)dx$$

(on sait que $C_{\alpha,\beta} < \infty$; voir par exemple [*12*]).

La loi de Y_t est donc $\varphi\left(\frac{x}{\nu(t)}\right)\frac{dx}{\nu(t)}$ et, par suite, $E(|Y_t|^\beta) = C_{\alpha,\beta}\nu(t)^\beta$. Il suffit donc de poser $X_t = C_{\alpha,\beta}^{-\frac{1}{\beta}} Y_t$ pour obtenir le résultat cherché.

Remarque. — Il résulte immédiatement de ce lemme que si $1 < p \leqslant 2$. et si $\| x - y \|^p$ est de type négatif sur l'espace Z normé sur R, alors Z est de type q pour tout $q \in [1, p[$ (resp. pour tout $q \geqslant 1$ si $p = 2$).

LEMME 2 [*8*]. — *Soit ν une application continue de R^n dans R^+ telle que :*

1° $\nu(\lambda t) = |\lambda| \nu(t)$ pour tout $\lambda \in R$ et $t \in R^n$;
2° $[\nu(t-u)]^\alpha$ *est de type négatif sur R^n, pour un nombre réel* $\alpha \geqslant 0$ et $\leqslant 2$;

Alors il existe une mesure de Radon $\mu \geqslant 0$ sur la sphère unité S *de* R^n, *telle que* $\nu(t) = \left[\int_S |\langle t, x \rangle|^\alpha \mu(dx)\right]^{\frac{1}{\alpha}}$ *pour tout* $t \in R^n$.

D'après le lemme précédent, pour tout $\beta > 0$ et $< \alpha$, il existe un espace de probabilité (Ω, P) et une application linéaire $t \to X_t$ de R^n dans $L^\beta(\Omega, P)$ telle que $\nu(t)^\beta = E(|X_t|^\beta)$.

Soit $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de R^n et soit $Q(d\omega)$ la mesure $\left[X_{e_1}^2(\omega) + \ldots + X_{e_n}^2(\omega)\right]^{\frac{\beta}{2}} P(d\omega)$ sur Ω. Pour chaque $x \in R^n$:

$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ ($x_1, \ldots, x_n \in R$), on a $X_x = x_1 X_{e_1} + \ldots x_n X_{e_n}$ et donc

$$X_{e_1}^2(\omega) + \ldots + X_{e_n}^2(\omega) = 0 \Rightarrow X_x(\omega) = 0.$$

On peut donc poser

$$Y_x(\omega) = [X_{e_1}^2(\omega) + \ldots X_{e_n}^2(\omega)]^{-\frac{1}{2}}.X_x(\omega).$$

On a alors :

$$\int_\Omega |Y_x(\omega)|^\beta Q(d\omega) = \int_\Omega |X_x(\omega)|^\beta P(d\omega) = \{\nu(X)\}^\beta.$$

Comme

$$0 < \beta < 2 \quad \text{on a} \quad \left[X_{e_1}^2 + \ldots + X_{e_n}^2\right]^{\frac{\beta}{2}} \leqslant |X_{e_1}|^\beta + \ldots + |X_{e_n}|^\beta$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega Q(d\omega) &\leqslant \int_\Omega [|X_{e_1}(\omega)|^\beta + \ldots + |X_{e_n}(\omega)|^\beta] P(d\omega) \\ &= |\nu(e_1)|^\beta + \ldots + |\nu(e_n)|^\beta.\end{aligned}$$

Soit μ_β la mesure image de Q par l'application $\omega \to (Y_{e_1}(\omega), \ldots, Y_{e_n}(\omega))$ de Ω dans R^n. Comme $Y_{e_1}^2 + \ldots + Y_{e_n}^2 = 1$ Q-p. s., μ_β est concentrée sur S.

On a $\mu_\beta(S) = Q(\Omega)$ et donc $\mu_\beta(S) \leqslant \nu(e_1)^\beta + \ldots + \nu(e_n)^\beta$; ce qui montre que si $\beta \uparrow \alpha$ la masse totale de μ_β reste bornée. Il en résulte que les μ_β ont un point adhérent μ, qui est une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur S, pour la topologie définie sur les mesures de Radon $\geqslant 0$ sur S par l'espace C(S).

Or, si $t = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$ ($\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R$), on a :

$$\begin{aligned}\int_S |\langle t, x\rangle|^\beta \mu_\beta(dx) &= \int_S |\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n|^\beta \mu_\beta(dx) \\ &= \int_\Omega |\lambda_1 Y_{e_1} + \ldots + \lambda_n Y_{e_n}|^\beta Q(d\omega) \\ &= \int_\Omega |Y_t|^\beta Q(d\omega) = \nu(t)^\beta.\end{aligned}$$

En passant à la limite quand $\beta \uparrow \alpha$, on a donc :

$$\int_S |\langle t, x\rangle|^\alpha \mu(dx) = \nu(t)^\alpha. \text{ C. Q. F. D.}$$

LEMME 3. — *Soit Z un espace normé sur R de dimension finie, tel que* $\| x - y \|^p$ *soit de type négatif sur Z, avec* $1 \leqslant p \leqslant 2$. *Alors Z est de type p.*

On peut identifier Z à R^n en choisissant une base. On applique le lemme précédent avec $\nu(t) = \| t \|$. On a donc :

$$\| t \| = \left[\int_S | \langle t, x \rangle |^p \mu(dx) \right]^{\frac{1}{p}} = \| \varphi_t \|_p$$

où φ_t est la fonction $x \to \langle t, x \rangle$ sur l'espace mesuré (S, μ).

L'application $t \to \varphi$ est donc une application linéaire isométrique de Z dans $L^p(S, \mu)$, C. Q. F. D.

Dans les théorèmes qui suivent nous utiliserons la notion de R-espace vectoriel réticulé (ces espaces sont aussi appelés espaces de Riesz dans [*6*] où on en trouvera la définition ainsi que les propriétés dont nous nous servons ci-dessous). Z étant un R-espace vectoriel réticulé et x, y deux éléments de Z nous noterons $x \cup y$ et $x \cap y$ les bornes supérieure et inférieure de $\{ x, y \}$, et $| x |$ l'élément $x \cup (-x) = x \cup 0 + (-x) \cup 0$; x et y sont dits étrangers si $x \cap y = 0$ (ils sont alors nécessairement $\geqslant 0$). On sait [*6*] que pour tout $x \in Z$, $x \cup 0$ et $(-x) \cup 0$ (appelés respectivement parties positive et négative de x) sont étrangers.

THÉORÈME 3. — *Soit Z une espace de Banach sur* R, *réticulé, satisfaisant les conditions :*

a) $\| \, | x | \, \| = \| x \|$ *pour tout* $x \in Z$.

b) Si $x, y \geqslant 0$ *alors* $\| x + y \|^p \geqslant \| x \|^p + \| y \|^p \geqslant \| x \cup y \|^p$, *où p est un nombre réel* $\geqslant 1$.

Alors il existe un espace mesuré (E, μ) *tel que Z soit isomorphe (en tant qu'espace de Banach réticulé) à* $L^p(E, \mu)$.

Si x et y sont étrangers on a $x \cap y = 0$ donc $x \cup y = x + y$ et par suite (d'après *b*)) $\| x + y \|^p \geqslant \| x \|^p + \| y \|^p \geqslant \| x + y \|^p$ c'est-à-dire $\| x + y \|^p = \| x \|^p + \| y \|^p$. Par récurrence sur k on en déduit que si $x_1, \ldots, x_k$ sont étrangers deux à deux on a

$$\| x_1 + \ldots + x_k \|^p = \| x_1 \|^p + \ldots + \| x_k \|^p.$$

En particulier $\| x \cup 0 + (-x) \cup 0 \|^p = \| x \cup 0 \|^p + \| (-x) \cup 0 \|^p$.

Comme $x \cup 0 + (-x) \cup 0 = | x |$ et que $\| x \| = \| \, | x | \, \|$ d'après *a*) on a donc :

$$\| x \|^p = \| x \cup 0 \|^p + \| (-x) \cup 0 \|^p.$$

Si $0 \leqslant x \leqslant y$, *alors* $\| x \| \leqslant \| y \|$: En effet $y = x + a$ avec $a \geqslant 0$ et donc $\| y \|^p \geqslant \| x \|^p + \| a \|^p$ d'où $\| y \| \geqslant \| x \|$.

Toute suite décroissante x_n *d'éléments* $\geqslant 0$ *de* Z *converge dans* Z. En effet la suite $\| x_n \|^p$ décroît d'après ce qui précède vers une limite α. On choisit N tel que $\| x_n \|^p \leqslant \alpha + \varepsilon$ pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, ε étant un nombre > 0. Pour $\mathrm{N} \leqslant n \leqslant m$ on a d'après *b*) $\| x_n \|^p \geqslant \| x_m \|^p + \| x_n - x_m \|^p$ (puisque $x_m \geqslant 0$ et $x_n - x_m \geqslant 0$) et donc $\alpha + \varepsilon \geqslant \alpha + \| x_n - x_m \|^p$ soit $\| x_n - x_m \|^p \leqslant \varepsilon$, ce qui montre que la suite x_n est une suite de Cauchy.

Il en résulte que toute suite croissante majorée d'éléments de Z *converge dans* Z : si la suite x_n est croissante et $x_n \leqslant x$, la suite $x - x_n$ est une suite décroissante d'éléments $\geqslant 0$.

Les fonctions $x \cup y$ *et* $x \cap y$ *sont des applications continues de* $\mathrm{Z} \times \mathrm{Z}$ *dans* Z.

On utilise l'inégalité $| a \cup b - c \cup d | \leqslant | a - c | + | b - d |$ qu'il est facile de démontrer pour tout *R*-espace vectoriel réticulé. On a donc $\| \, | a \cup b - c \cup d | \, \| \leqslant \| \, | a - b | + | c - d | \, \| \leqslant \| \, | a - b | \, \| + \| \, | c - d | \, \|$ c'est-à-dire $\| a \cup b - c \cup d \| \leqslant \| a - b \| + \| c - d \|$, ce qui montre que la fonction $x \cup y$ est continue sur $\mathrm{Z} \times \mathrm{Z}$. Il en est de même de la fonction $x \cap y = x + y - x \cup y$.

A chaque élément $e \geqslant 0$ de Z on associe le sous-espace vectoriel $\mathrm{Z}(e) = \{ x \in \mathrm{Z};$ il existe $n \in R^+$ tel que $ne \geqslant | x | \}$. Il est clair que $\mathrm{Z}(e)$ est un sous-espace vectoriel réticulé de Z.

Soient $e_1, \ldots, e_k \in \mathrm{Z}$, *étrangers deux à deux.* Alors $\mathrm{Z}(e_1), \ldots, \mathrm{Z}(e_k)$ *sont linéairement indépendants :* sinon il existe $u_1 \in \mathrm{Z}(e_1), \ldots, u_k \in \mathrm{Z}(e_k)$ tels que $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k = 0$ avec par exemple $\lambda_1 \neq 0$, $u_1 \neq 0$. D'où $u_1 = \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k$, et donc

$$| u_1 | \leqslant | \alpha_2 | \, | u_2 | + \ldots + | \alpha_k | \, | u_k |.$$

Or on a

$$| u_2 | \leqslant n_2 e_2, \ldots, | u_k | \leqslant n_k e_k \quad \text{avec} \quad n_2, \ldots, n_k \in R^+.$$

Donc en posant $\mathrm{M} = \sup (n_2 | \alpha_2 |, \ldots, n_k | \alpha_k |)$ on a :

$$| u_1 | \leqslant \mathrm{M}(e_2 + \ldots + e_k) = \mathrm{M} e_2 \cup \ldots \cup e_k.$$

Or :

$$| u_1 | \leqslant n_1 e_1 \quad \text{avec} \quad n_1 \in R^+,$$

et donc si $\mathrm{N} = \sup (\mathrm{M}, n_1)$:

$$| u_1 | \leqslant \mathrm{N}[e_1 \cap (e_2 \cup \ldots \cup e_k)] = 0,$$

et donc $u_1 = 0$; ce qui contredit l'hypothèse.

Soit alors J un sous-ensemble de Z dont tous les éléments sont de norme 1 et étrangers deux à deux, qui soit maximal dans la famille des sous-ensembles de Z, qui ont ces propriétés : l'existence d'un tel J est une conséquence immédiate du théorème de Zorn appliqué à cette famille.

Soit Z_0 le sous-espace vectoriel de Z engendré par les $Z(e)$ pour $e \in J$. D'après ce qui précède il est isomorphe à la somme directe des $Z(e)$ pour $e \in J$.

Z_0 *est partout dense dans* Z : tout élément de Z étant différence de deux éléments $\geqslant 0$, il suffit de montrer que si ξ est un élément $\geqslant 0$ de Z alors $\xi \in \overline{Z}_0$.

Soit I un sous-ensemble fini de J, on a :

$$\xi \geqslant \bigcup_{e \in I} (\xi \cap e) = \sum_{e \in I} \xi \cap e$$

(puisque les $\xi \cap e$ sont étrangers deux à deux). D'après la condition *b*) on en déduit :

$$\| \xi \|^p \leqslant \Big\| \sum_{e \in I} \xi \cap e \Big\|^p \geqslant \sum_{e \in I} \| \xi \cap e \|^p.$$

On a donc :

$$\sum_{e \in I} \| \xi \cap e \|^p \leq \| \xi \|^p \text{ pour tout sous-ensemble fini I de J.}$$

On en déduit que $\{ e \in J ;\ \xi \cap e \neq 0 \}$ est dénombrable (puisque pour chaque entier n, $\left\{ e \in J ;\ \| \xi \cap e \| \geqslant \frac{1}{n} \right\}$ est fini); soit $\{ e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots \}$ ce sous-ensemble de J. Posons $f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{2^k}$ (cette série converge puisque $\| e_k \| = 1$ pour tout k) et $\xi_n = \xi \cap nf$ pour tout entier $n > 0$. On a :

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \xi \cap \left(\frac{ne_k}{2^k} \right) = \lim_{N=\infty} \sum_{k=1}^{N} \xi \cap \left(\frac{ne_k}{2^k} \right),$$

ce qui montre que $\xi_n \in \overline{Z}_0$ pour tout entier $n > 0$.

La suite ξ_n est croissante et $\leqslant \xi$. Elle a donc une limite u et $u \in \overline{Z}_0$. On pose $v = \xi - u$ et $w = v \cap f$. On a donc $v \leqslant \xi - \xi \cap nf$ pour tout n par suite $w \leqslant f$, $w \leqslant \xi - \xi \cap nf$ pour tout n. Montrons par récurrence sur k que $kw \leqslant \xi$: c'est vrai si $k = 0$; en admettant alors l'inégalité $kw \leqslant \xi$, on a $w + \xi \cap kf \leqslant \xi$ donc $w + (kw) \cap (kf) \leqslant \xi$ soit $w + k(w \cap f) \leqslant \xi$. Comme $w \leqslant f$, $w \cap f = w$ et donc $(k+1)w \leqslant \xi$ ce qu'il fallait démontrer. Comme $w \geqslant 0$ et que $kw \leqslant \xi$ pour tout entier k on a $k \| w \| \leqslant \| \xi \|$ pour tout k et donc $w = 0$.

Cela montre que $v \cap f = 0$; cela entraîne $v \cap e_n = 0$ pour tout n; or $0 \leqslant v \leqslant \xi$ et donc $v \cap e = 0$ pour tout $e \notin \{ e_1, \ldots, e_n, \ldots \}$. On a donc $v \cap e = 0$ pour tout $e \in \mathrm{J}$. Si v était $\neq 0$ l'ensemble $\mathrm{J} \cup \left\{ \frac{v}{\| v \|} \right\}$ serait formé d'éléments de norme 1 et étrangers 2 à 2, ce qui contredit la maximalité de J. On a donc $v = 0$, soit $\xi = u$ et donc $\xi \in \overline{\mathrm{Z}}_0$, C. Q. F. D.

Supposons démontré que pour chaque $e \in \mathrm{J}$ il existe un espace mesuré (E_e, μ_e) tel que $\overline{\mathrm{Z}(e)}$ soit isomorphe à $\mathrm{L}^p(\mathrm{E}_e, \mu_e)$. Soit (E, μ) l'espace mesuré somme directe des espaces (E_e, μ_e) $(e \in \mathrm{J})$. Pour chaque $e \in \mathrm{J}$ on a donc un isomorphisme $\varphi_e : \mathrm{Z}(e) \to \mathrm{L}^p(\mathrm{E}_e, \mu_e)$, $\varphi_e[\mathrm{Z}(e)]$ étant partout dense dans $\mathrm{L}^p(\mathrm{E}_e, \mu_e)$. On en déduit un isomorphisme : $\mathrm{Z}_0 \to \mathrm{L}^p(\mathrm{E}, \mu)$ par somme directe (c'est bien une isométrie, car si $x_1 \in \mathrm{Z}(e_1), \ldots, x_n \in \mathrm{Z}(e_n)$, $| x_1 |, \ldots, | x_n |$ sont étrangers deux à deux : donc

$$\| x_1 + \ldots + x_n \|^p = \| x_1 \|^p + \ldots + \| x_n \|^p).$$

De plus $\varphi(\mathrm{Z}_0)$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathrm{E}, \mu)$ et donc φ se prolonge en un isomorphisme de $\overline{\mathrm{Z}}_0 = \mathrm{Z}$ sur $\mathrm{L}^p(\mathrm{E}, \mu)$.

Il reste donc à montrer que si $e \geqslant 0$, $\overline{\mathrm{Z}(e)}$ est isomorphe à $\mathrm{L}^p(\mathrm{E}, \mu)$ pour un certain espace mesuré (E, μ).

Soit $\mathrm{S} = \{ u \in \mathrm{Z}(e);\ u \cap (e - u) = 0 \}$. On a donc $0 \leqslant u \leqslant e$ pour chaque $u \in \mathrm{S}$.

Si $u, v \in \mathrm{S}$, on a $e - u \cup v = -(u - e) \cup (v - e) = (e - u) \cap (e - v)$. Donc :

$$\begin{aligned}(u \cup v) \cap (e - u \cup v) &= (u \cup v) \cap [(e - u) \cap (e - v)] \\ &= [u \cap (e - u) \cap (e - v)] \cup [v \cap (e - v) \cap (e - u)] = 0.\end{aligned}$$

Donc $u \cup v \in \mathrm{S}$.

Si $u \in \mathrm{S}$, $e - u \in \mathrm{S}$; si u_n est une suite croissante d'éléments de S, u_n a une limite u dans Z (car $u_n \leqslant e$) et $u \in \mathrm{S}$ puisque

$$u \cap (e - u) = \lim_{n \to \infty} u_n \cap (e - u_n) = 0.$$

Cela montre que S est une σ-algèbre (où la complémentation est $u \to e - u$). D'après un théorème de Loomis ([5], p. 171) il existe un ensemble E, une σ-algèbre $\mathcal{B}$ de parties de E, et un σ-idéal $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{B}$ tels que S soit isomorphe à la σ-algèbre $\mathcal{B}/\mathcal{B}_0$.

On définit une mesure $\mu \geqslant 0$ sur S (donc une mesure sur l'espace mesurable (E, $\mathcal{B}$) pour laquelle tous les éléments de $\mathcal{B}_0$ sont négligeables) en posant $\mu(u) = \| u \|^p$: μ est additive car si $u \cap v = 0$ on a $\| u \cup v \|^p = \| u \|^p + \| v \|^p$; elle est dénombrablement additive puisque si $u_n \downarrow 0$, alors $u_n \to 0$ dans Z donc $\| u_n \|^p \to 0$.

Soit $\mathcal{E}$ le sous-espace de $Z(e)$ formé des combinaisons linéaires à coefficients réels d'éléments de S. Il est clair qu'il est isomorphe à l'espace des fonctions étagées réelles sur (E, $\mathcal{B}$, μ), modulo le sous-espace des fonctions nulles μ-presque partout.

Il suffit donc de montrer que $\mathcal{E}$ *est partout dense dans* $Z(e)$: l'isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur l'espace des fonctions étagées sur (E, $\mathcal{B}$, μ) étant une isométrie pour la norme de $L^p(E, \mu)$ se prolongera alors en un isomorphisme de $\overline{\mathcal{E}} = \overline{Z(e)}$ sur $L^p(E, \mu)$.

Montrons d'abord le lemme suivant :

Si $\xi \in Z(e)$, $\xi \geqslant 0$, $\xi \neq 0$, *il existe* $v \in S$, $v \neq 0$ *et un entier* $n > 0$ *tels que* $\xi \geqslant \frac{1}{n} v$.

En multipliant ξ au besoin par un entier > 0 on peut supposer $\xi \not\leqslant e$ (si $k\xi \leqslant e$ pour tout entier k, alors $\xi = 0$). On pose $z = (\xi - e \cup 0 > 0$, et $v = \lim\limits_{n\to\infty} e \cap nz$. Comme $z > 0, z \cap e > 0$ (si $z \cap e = 0$, comme $z \in Z(e)$ on a $z = 0$); donc $v > 0$ puisque $v \geqslant z \cap e$. Si $w_k = (e - v) \cap kz$ (k entier $\geqslant 0$) on a $0 \leqslant w_k \leqslant kz$ et $w_k \leqslant e - v \leqslant e - e \cap nz$ pour tout entier $n > 0$. On montre par récurrence sur n que $nw_k \leqslant e$: c'est vrai pour $n = 0$; en admettant l'inégalité $nw_k \leqslant e$, on a $w_k \leqslant e - e \cap pz$ pour tout entier p et donc $w_k + e \cap nkz \leqslant e$, d'où $w_k + nw_k \cap nkz \leqslant e$ soit $w_k + n(w_k \cap kz) \leqslant e$. Comme $w_k \leqslant kz$ on a donc $(n + 1)\, w_k \leqslant e$ ce qu'il fallait démontrer.

On a donc $0 \leqslant nw_k \leqslant e$ pour tout entier n, et donc $w_k = 0$.

Donc $(e - v) \cap kz = 0$ et aussi $(e - v) \cap e \cap kz = 0$. En faisant tendre k vers $+\infty$ on obtient $(e - v) \cap v = 0$ ce qui montre que $v \in S$.

Mais si $w = e \cap n(\xi - e)$ on a $w \leqslant e$; $w \leqslant n\xi - ne$ soit $w + ne \leqslant n\xi$ et donc $(n + 1)w \leqslant n\xi$; soit $\xi \geqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right) w$ et comme $\xi \geqslant 0$, on a :

$$\xi \geqslant \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)w\right] \cup 0 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)(w \cup 0)\,;$$

donc $\xi \geqslant w \cup 0$ c'est-à-dire

$$\xi \geqslant [e \cap n(\xi - e)] \cup 0 = e \cap [n(\xi - e) \cup 0] = e \cap nz.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $\xi \geqslant v$, ce qui démontre le lemme.

Supposons alors que $\mathcal{E}$ ne soit pas partout dense dans $Z(e)$ et soit $\xi \geqslant 0$, $\xi \in Z(e)$, $\xi \notin \bar{\mathcal{E}}$; Soit m la borne supérieure de $\| \eta \|$ pour $\eta \in \bar{\mathcal{E}}$, $0 \leqslant \eta \leqslant \xi$; soit η_n une suite d'éléments $\geqslant 0$ de $\bar{\mathcal{E}}$, $\eta_n \leqslant \xi$, telle que $\| \eta_n \| \uparrow m$. On peut supposer la suite η_n croissante en la remplaçant au besoin par $\bigcup_{k \leqslant n} \eta_k$. Alors η_n a une limite $\eta \in \bar{\mathcal{E}}$ et on a $\| \eta \| = m$, $0 \leqslant \eta \leqslant \xi$.

Comme $\xi - \eta \neq 0$ (sinon $\xi \in \bar{\mathcal{E}}$), d'après le lemme précédent il existe $v \in S$, $v \neq 0$ tel que $\xi - \eta \geqslant \frac{1}{n} v$ où n est un entier $\geqslant 0$. Alors

$$\eta + \frac{1}{n} v \in \bar{\mathcal{E}}, \quad 0 \leqslant \eta + \frac{1}{n} v \leqslant \xi \quad \text{et} \quad \left\| \eta + \frac{1}{n} v \right\|^p \geqslant \| \eta \|^p + \left\| \frac{1}{n} v \right\|^p > \| \eta \|^p.$$

d'où $\left\| \eta + \frac{1}{n} v \right\| > m$ ce qui contredit la définition de m. Cette contradiction montre que $\mathcal{E}$ est dense dans $Z(e)$. La démonstration du théorème 3 est achevée.

THÉORÈME 4. — *Pour qu'un espace vectoriel* B *normé sur* R *soit de type p* (*p nombre réel* $\geqslant 1$) *il faut et il suffit que tous ses sous-espaces de dimension finie le soient.*

La condition est évidemment nécessaire. Soit alors B un espace normé dont tous les sous-espaces de dimension finie sont de type p. Soit $\mathcal{F}$ la famille des sous-espaces de dimension finie de B. A chaque $F \in \mathcal{F}$ est associée une application linéaire isométrique i_F de F dans $L^p(E_F, \mu_F) = L^p_F$.

Posons $X(F) = \{ G \in \mathcal{F} ; G \supset F \}$; $X(F)$ est non vide puisque $F \in X(F)$.

De plus $X(F_1) \cap \ldots \cap X(F_n) = X(F_1 + F_2 + \ldots + F_n)$. Il en résulte qu'il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{F}$ tel que $X(F) \in \mathcal{U}$ pour tout $F \in \mathcal{F}$.

Un élément de $\prod_{F \in \mathcal{F}} L^p_F$ sera désigné par $\{ f_F \}_{F \in \mathcal{F}}$ avec $f_F \in L^p_F$ pour chaque $F \in \mathcal{F}$.

Posons alors $\mathcal{L}_0 = \{ \{ f_F \}_{F \in \mathcal{F}} ;$ pour chaque $F \in \mathcal{F}, f_F \in L^p_F$, et il existe un nombre réel $N > 0$ tel que $\| f_F \| \leqslant N$ pour tout $F \in \mathcal{F} \}$. On définit une semi-norme sur $\mathcal{L}_0$ $\left(\text{qui est un sous-espace vectoriel de } \prod_{F \ni \mathcal{F}} L^p_F\right)$ en posant $\| \{ f_F \}_{F \in \mathcal{F}} \| = \lim_{\mathcal{U}} \| f_F \|$ (c'est le nombre réel r tel que $\forall \varepsilon > 0$, l'ensemble $\{ F \in \mathcal{F} ; | \| f_F \| - r | \leqslant \varepsilon \}$ appartienne à $\mathcal{U}$; il existe un tel r puisque $\| f_F \| \in [-N, N]$ pour tout $F \in \mathcal{F}$, et que $[-N, N]$ est compact).

Soit $\mathcal{N}$ le sous-espace de $\mathfrak{L}_0$ où cette semi-norme est nulle. L'espace $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0/\mathcal{N}$ est un espace vectoriel normé.

$\mathfrak{L}_0$ est un R-espace vectoriel réticulé si on définit :

$$\{f_F\} \cup \{g_F\} = \{f_F \cup g_F\},$$

De plus, si

$\{f_F\}, \{g_F\}, \{h_F\} \in \mathfrak{L}_0$ $\|f_F \cup h_F - g_F \cup h_F\| \leqslant \|f_F - g_F\|$ pour chaque $F \in \mathcal{F}$.

On en déduit que :

$$\|\{f_F\} \cup \{h_F\} - \{g_F\} \cup \{h_F\}\| \leqslant \|\{f_F\} - \{g_F\}\|$$

en passant à la limite suivant l'ultrafiltre $\mathfrak{U}$; ce qui montre que si :

$\{f_F\} \sim \{g_F\}$ (modulo $\mathcal{N}$) alors $\{f_F\} \cup \{h_F\} \sim \{g_F\} \cup \{h_F\}$ (modulo $\mathcal{N}$).

Donc $\mathfrak{L}$ lui-même est un espace vectoriel réticulé normé.

Comme l'opération $\cup$ est continue de $\mathfrak{L} \times \mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{L}$ (cela résulte de l'inégalité) :

$$\|\{f_F\} \cup \{g_F\} - \{f'_F\} \cup \{g'_F\}\| \leqslant \|\{f_F\} - \{f'_F\}\| + \|\{g_F\} - \{g'_F\}\|$$

obtenue en passant à la limite suivant $\mathfrak{U}$ dans l'inégalité

$$\|f_F \cup g_F - f'_F \cup g'_F\| \leqslant \|f_F - f'_F\| + \|g_F - g'_F\|$$

qui est vraie pour tout $F \in \mathcal{F}$), le complété de $\mathfrak{L}$ est un espace de Banach réticulé sur R.

Or, $|\{f_F\}| = \{|f_F|\}$ et donc $\||\{f_F\}|\| = \|\{f_F\}\|$; d'autre part, si $\{f_F\}, \{g_F\} \geqslant 0$, dans $\mathfrak{L}_0$ on a $f_F \geqslant 0$, $g_F \geqslant 0$ pour tout $F \in \mathcal{F}$, donc :

$$\|f_F + g_F\|^p \geqslant \|f_F\|^p + \|g_F\|^p \geqslant \|f_F \cup g_F\|^p ;$$

en passant à la limite suivant $\mathfrak{U}$, on obtient :

$$\|\{f_F\} + \{g_F\}\|^p \geqslant \|\{f_F\}\|^p + \|\{g_F\}\|^p \geqslant \|\{f_F\} \cup \{g_F\}\|^p.$$

Cela montre que le complété de $\mathfrak{L}$ satisfait les conditions du théorème 3, donc est isomorphe à $L^p(E, \mu)$ pour un certain espace mesuré (E, μ). On définit une injection i de B dans $\mathfrak{L}_0$ en posant :

$$i(x) = \{f_F\}_{F \in \mathcal{F}} \qquad \text{avec} \qquad \begin{aligned} f_F &= i_F(x) \ \text{si } x \in F \\ f_F &= 0 \quad\ \text{si } x \notin F. \end{aligned}$$

Alors $i(x+y) = i(x) + i(y)$ (modulo $\mathcal{N}$); car $\{F \in \mathcal{F} ; x, y \in F\} \in \mathfrak{U}$ par définition de $\mathfrak{U}$; or, si $x, y \in F$ on a $i_F(x+y) = i_F(x) + i_F(y)$.

De même $i(\lambda x) = \lambda i(x)$ (modulo $\mathcal{N}$) pour $\lambda \in R$.

On en déduit que i définit une application linéaire de B dans $\mathfrak{L}$; elle est isométrique puisque $\| i_F(x) \| = \| x \|$ si $x \in F$, et que $\{ F \in \mathcal{F};\ x \in F \}$ est un élément de $\mathcal{U}$. C. Q. F. D.

Le théorème 2 est maintenant immédiat : si Z est un espace vectoriel normé sur R, tel que $\| x - y \|^p$ soit de type négatif sur Z, tous les sous-espaces de dimension finie de Z sont de type p d'après le lemme 3, donc Z aussi d'après le théorème 4.

TROISIÈME PARTIE

FONCTIONS ALÉATOIRES STABLES

1. Caractérisation des fonctions stables.

Une fonction aléatoire X sur un ensemble T est une application $t \to X(t)$, $X(t)$ étant une variable aléatoire.

X sera dite stable d'ordre p, $0 < p \leqslant 2$, si pour toute partie finie $(t_1, \ldots, t_n) \subset T$, la loi de $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ est une loi stable sur R^n, d'ordre p. Dans tout ce qui suit nous supposerons cette loi symétrique. Soit Φ une fonction $R^+ \to R^+$.

LEMME 4. — *Si la fonction* $\Phi(\| f - g \|)$ *est de type négatif sur un espace vectoriel* B, *normé, la formule*

$$- \log E \exp i \sum_1^n \lambda_j X_{f_j} = \Phi\left(\left\| \sum_1^n \lambda_j f_j \right\| \right)$$

définit sur B *une fonction aléatoire* (appelée quelquefois distribution faible sur le dual B*). Ce lemme est une conséquence immédiate du théorème de Kolmogorov [*4*].

Définition. — Sur un espace $L^p(E, \mu)$ la fonction aléatoire définie par le lemme 4 avec $\Phi(t) = t^p$ sera dite triviale.

THÉORÈME 5. — *Pour toute fonction aléatoire stable d'ordre p, définie sur un ensemble* T, *on peut plonger* T *dans un espace* $L^p(E, \mu)$ *de façon que la fonction aléatoire considérée soit la restriction à* T *de la fonction triviale sur* $L^p(E, \mu)$.

Soit $X(t)$ une fonction stable sur T. Posons :

$$-\log E\left(\exp i\sum_{j=1}^{u}\lambda_j X(t_j)\right) = \int_{S_n}\left|\sum_1^n \lambda_j s_j\right|^p d\mu_{t_1\ldots t_n}(s_1 \ldots s_n) \text{ (Cf. Lemme 2).}$$

La correspondance $\sum_1^n \lambda_j X(t_j) \to \sum_1^n \lambda_j s_j$ définit une application linéaire de l'espace vectoriel $V_{t_1,\ldots,t_n}$ engendré par $X(t_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ dans l'espace $L^p(S_n, \mu_{t_1,\ldots,t_n})$.

Soit V l'espace vectoriel engendré par $X(t)$ pour $t \in T$. On pose :

$$\left\|\sum_{j=1}^n \lambda_j X(t_j)\right\| = \left[-\log E\left(\exp i\sum_{j=1}^n \lambda_j X(t_j)\right)\right]^{1/p}$$

et on a ainsi défini une norme sur V, puisque pour chaque sous-espace $V_{t_1,\ldots,t_n}$ de V on a :

$$\left\|\sum_{j=1}^n \lambda_j X(t_j)\right\|^p = \left\|\sum_{j=1}^n \lambda_j s_j\right\|^p.$$

De plus $V_{t_1,\ldots,t_n}$ muni de cette norme est un espace de type p (sous-espace de $L^p(S_n, \mu_{t_1,\ldots,t_n})$) et donc V l'est aussi d'après le théorème 4.

On peut donc plonger V isométriquement dans un espace $L^p(E, \mu)$; l'application $t \to X(t)$ est alors le plongement cherché de T dans $L^p(E, \mu)$.

Application aux processus stables. — Soit $X(t)$ un processus stable $(t \in R)$. Supposons $X(t)$ *continu en probabilité.*

On peut dans le théorème 4 remplacer $L^p(E, \mu)$ par $L^p(R, dx)$.

En effet, le processus $X(t)$ étant continu en probabilité admet les rationnels comme partie séparante, l'espace V est alors séparable.

Considérons alors l'espace de plongement $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$. Soit $\mathcal{A}_x$ la σ-algèbre induite par la famille $(X_t)_{t\in Q}$, Q désignant les rationnels.

Elle est séparable. Soit μ_X la trace de μ sur $\mathcal{A}_X$. L'image f_t de X_t est $\mathcal{A}_X$-mesurable. L'espace $L^p(E, \mathcal{A}_X, \mu_X)$, est un espace séparable, on sait d'après un résultat classique ([5], p. 173) qu'il peut se plonger par isométrie dans $L^p(R, B, dx)$.

Considérons alors la distribution aléatoire $Z(\omega)$, définie sur la droite comme dérivée, au sens des distributions, du processus stable Y à accroissements indépendants d'ordre p.

Pour chaque fonction étagée $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{[a_i,b_i]}$, $\langle Z, \varphi \rangle (\omega)$ est définie, p. s. par

$$\langle Z, \varphi \rangle (\omega) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [Y(b_i) - Y(a_i)].$$

Si $f \in L^p(R, \mathcal{B}, dx)$, si $\varphi_n \xrightarrow{L^p} f$, φ_n étant une suite de fonctions étagées, il est facile de voir que la formule :

$$\langle Z, f \rangle (\omega) = \lim \langle Z, \varphi_n \rangle (\omega)$$

définit p. s. une variable aléatoire notée $\int f dZ$, de fonction caractéristique $\exp(- \|f\|_p^p \, |t|^p)$.

THÉORÈME 6. — *Tout processus stable d'ordre p, continu en probabilité admet une représentation du type*

$$X(t) = \int_R f_t(x) dZ(x)$$

ou encore :

$$X(t) = \langle f_t, Z \rangle \text{ p. s.}$$

avec

$$f_t(x) \in L^p(R, dx) \quad \text{et} \quad \|f_t - f_{t_0}\|_p \to 0 \ (t \to t_0) \quad \forall t_0 \in R.$$

Il est clair que la représentation ci-dessus définit bien un processus stable.

Inversement si $X(t)$ est un processus stable sur R, considérons le plongement de V dans $L^p(R, dx)$, défini par $X(t) \to f_t$, introduit plus haut. On a :

$$E\left[\exp i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X(t_j)\right] = \exp\left(- \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_{t_j} \right\|_p^p\right).$$

Posant :

$$X'(f) = \int_R f(x) dZ(x), f \in L^p \quad \text{et} \quad X'(t) = X'(f_t)$$

on a :

$$E\left[\exp i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X'(t_j)\right] = \exp\left(- \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{1}^{n} \lambda_j f_{t_j}(x) \right|^p dx\right).$$

$X(t)$ et $X'(t)$ sont donc équivalents du point de vue stochastique.

Introduisons maintenant une classe de fonctions aléatoires particulières.

Définition. — Pour $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2$, on dira que $Y(t)$ est une fonction stable d'ordre p sur T engendrée par $X(t)$ fonction stable d'ordre q sur T si l'on a

$$\left[-\log E\left(\exp i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y(t_j)\right)\right]^q = \left[-\log E\left(\exp i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X(t_j)\right)\right]^p$$

$$\forall \lambda_j \in R, \qquad \forall t_j \in T, \qquad \forall n > 0.$$

Si $q = 2$, Y sera dite sous-gaussienne. Indiquons, sans démonstration quelques propriétés simples des processus sous-gaussiens sur R, stationnaires, continus en probabilité, stables d'ordre p, $1 \leqslant p < 2$, qui montrent que le comportement général des processus stables peut être plus compliqué que celui des processus gaussiens.

P-1 : Si $Y(t)$ est sous-gaussien, l'espace vectoriel engendré par $Y(t)$, $t \in R$, ne contient pas 2 variables aléatoires (donc stables), non dégénérées et indépendantes.

P-2 : Si $Y(t)$ est sous-gaussien, il n'existe pas de mesure μ telle qu'on ait :

$$Y(t) = \int e^{itu} dZ_\mu(u),$$

où Z est la distribution aléatoire stable de mesure spectrale μ.

P-3 : Si $Y(t)$ est sous-gaussien, il admet une décomposition de Wold :

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t),$$

mais les composantes déterministe et non déterministe ne sont indépendantes que si l'une d'elles est nulle.

2. Applications aux espaces L^p, considérés comme espaces métriques.

Définition. — On appellera distance de type p, sur un ensemble T une distance d telle que (T, d) se plonge isométriquement dans un espace $L^p(E, \mu)$ (distance hilbertienne si $p = 2$).

THÉORÈME 7. — *Si $L^p(E, \mu)$ est de dimension infinie, si $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2$, $\| f - g \|_p^a$ est une distance de type q, si et seulement si $0 < a \leqslant \frac{p}{q}$ (cf.* [*1*] *dans le cas $q = 2$).*

Supposons d'abord $a > p/q$; si $\| f - g \|_p^a$ était une distance de type q sur $L^p(E, \mu)$, comme $\| f - g \|_q^{q/2}$ est une distance hilbertienne sur tout espace L^q, $\| f - g \|_p^{qa/2}$ serait une distance hilbertienne sur $L^p(E, \mu)$ ce qui est impossible puisque $qa/2 > p/2$.

Il suffit maintenant de montrer le théorème pour $a = p/q$: en effet si $\| f - g \|_p^{p/q}$ est une distance de type q sur $L^p(E, \mu)$ quels que soient p, q tels que $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2$, et si $a \leqslant p/q$, $\| f - g \|_p^a$ est une distance de type p/a sur $L^p(E, \mu)$, et on conclut en remarquant que puisque $p/a \geqslant q$, tout espace $L^{p/a}$ se plonge isométriquement dans un L^q.|

Il reste donc à montrer que $\| f - g \|_p^{p/q}$ est ne distance de type q pour l'espace $L^p(E, \mu)$; il suffit de montrer que c'en est une sur| l'espace $\mathcal{E}(E, \mu)$ des fonctions étagées. Nous utiliserons pour cela le

THÉORÈME. — *Pour qu'une distance d sur un ensemble* T *soit de type* $p \geqslant 1$, *il faut et il suffit qu'elle soit de type p sur chaque sous-ensemble fini de* T.

La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 4 : on choisit un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur l'ensemble $\mathcal{F}$ des parties finies de T, tel que, pour chaque partie finie F de T, $\{ G \in \mathcal{F}; G \supset F \} \in \mathcal{U}$. A chaque partie finie F est associée un espace L_F^p, et on termine la démonstration comme au théorème 4.

On peut donc se contenter de montrer que $\| f - g \|_p^{p/q}$ est une distance de type p sur chaque sous-espace de dimension finie de $\mathcal{E}(E, \mu)$; or un tel sous-espace est isomorphe à un sous-espace de l_n^p (l'espace R^n muni de la norme $(| x_1 |^p + \ldots + | x_n |^p)^{1/p}$). Mais $| x - y |^{2p/q}$ est une fonction de type négatif sur R; il existe donc une famille $X_x^{(1)}$ $(x \in R)$ de variables gaussiennes sur un espace de probabilité (Ω_1, P_1) telle que

$$\| X_x^{(1)} - X_y^{(1)} \|_2^2 = | x - y |^{2p/q}.$$

Désignons par (Ω, μ) l'espace mesuré somme directe de (Ω_1, P_1), (Ω_2, P_2), $\ldots$, (Ω_n, P_n) où les (Ω, P_i) sont isomorphes à (Ω_1, P_1). Soit $X_x^{(i)}$ la famille stochastiquement équivalente à $X_x^{(i)}$ définie sur (Ω_i, P_i). On définit l'application :

$$\mathcal{J} : R^n \to L^q(\Omega, \mu) \quad \text{par} \quad \mathcal{J}(x_1, \ldots, x_n) = C \sum_{j=1}^{n} X_{x_j}^{(j)}$$

où C est le nombre réel > 0 tel que

$$C^q \| X_x^{(1)} - X_y^{(1)} \|_q^q = | x - y |^p.$$

On a alors :

$$|x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p = C^q \sum_{j=1}^{n} \| X_{x_j}^{(j)} - X_{y_j}^{(j)} \|_q^q$$
$$= \| \mathfrak{I}(x_1, \ldots, x_n) - \mathfrak{I}(y_1, \ldots, y_n) \|_q^q. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

3. Le déterminisme des fonctions gaussiennes à accroissements homogènes et isotropes sur L^p

Les fonctions aléatoires gaussiennes à accroissements homogènes et isotropes sont définies sur un espace de Banach B par

$$E\,|\,X(f) - X(g)\,|^2 = N(\| f - g \|),$$

où N est une fonction continue $R^+ \to R^+$; $f, g \in B$, $N(\| f - g \|)$ étant de type négatif sur B; $X(0) = 0$.

Rappelons que P. Lévy a désigné sous le nom de *fonction brownienne* la fonction X définie par $N(t) = t$. Cette fonction est définie sur les sous-espaces des espaces $L^1(E, \mu)$ d'après le théorème 2. Rappelons aussi que d'après le théorème 1 si $B = L^p(E, \mu)$, N a nécessairement la forme :

$$N(t) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\lambda t^p}}{\lambda}\, d\mu(\lambda), \qquad 0 < p \leqslant 2$$

$$\int_1^\infty \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda} < \infty$$

et $N(t) = 0$ si $p > 2$.

Définition. — Nous dirons que sur un espace topologique T une fonction aléatoire gaussienne X est déterministe, si l'on a : $X(f) \in V(G)$, $\forall f \in T$, $\forall G$ ouvert non vide de T, V(G) étant le sous-espace de Hilbert engendré par les variables gaussiennes $X(g)$, $g \in G$.

Exemple : Un processus gaussien stationnaire analytique (de covariance analytique) sur R est déterministe.

THÉORÈME 8. — *Soit* $L^p(E, \mu)$ *un espace vectoriel de dimension infinie; les fonctions gaussiennes à accroissements homogènes et isotropes sont déterministes si* μ *est une mesure diffuse, et* $1 < p \leqslant 2$.

Remarques. — 1° Si $p = 2$ la restriction μ diffuse, est sans objet.

2° Si $1 \leqslant p < 2$, il est facile de voir directement que L^p la fonction gaussienne définie par $N(t) = t^p$ est déterministe si et seulement si μ *est diffuse* (ceci vaut donc en particulier pour la fonction brownienne sur L^1).

L'étude de ces cas particuliers se trouve dans [*11*].

3° Dans la démonstration qui suit, les lemmes 6 et 7 sont inutiles si l'on se limite au cas de l'espace de Hilbert. La démonstration est dans ce cas une conséquence immédiate du lemme 9.

4° Si $L^p(E, \mu)$ n'est pas séparable, il suffit pour démontrer le théorème de le démontrer pour tout sous-espace séparable, il le sera *a fortiori* pour $L^p(E, \mu)$.

Démontrons d'abord 2 lemmes techniques sur les espaces L^p.

LEMME 6. — *Soit* $L^p(E, \mu)$, $L^p(F, \nu)$, *2 espaces de dimension infinie, la mesure* ν *étant diffuse. Soit* $\mathcal{E}$ *un sous-espace vectoriel de dimension finie, de fonctions étagées sur* (E, μ). *Soit* $f \in \mathcal{E}$, g *une fonction étagée sur* (F, ν), $\| f \|_p = \| g \|_p$. *Il existe alors une isométrie* $\mathfrak{I}$ *de* $\mathcal{E}$ *sur un ensemble* $\mathfrak{I}(\mathcal{E})$ *de fonctions étagées de* (F, ν), *telle que* $\mathfrak{I}(f) = g$.

Soit

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{B_i}, \qquad g = \sum_{j'=1}^{n'} \lambda'_{j'} 1_{B'_{j'}}.$$

Démontrons le lemme par récurrence sur $n + n'$.

Pour $n + n' = 2$, il est évident. Supposons le lemme vérifié pour $n + n' < k$.

Soit

$$l' = \inf_{1 \leqslant h' \leqslant n'} \left\{ h', \ |\lambda_1|^p \mu(B_1) \leqslant \sum_{j'=1}^{h'} |\lambda'_{j'}|^p \nu(B'_{j'}) \right\}.$$

Soit $C'_{l'} \subset B'_{l'}$ défini par

$$|\lambda_1|^p \mu(B_1) = \sum_{j'=1}^{l'-1} |\lambda'_{j'}|^p \nu(B'_{j'}) + |\lambda'_{l'}|^p . \nu(B'_{l'}).$$

Posons alors

$$\mathfrak{I}(1_{B_1}) = \sum_{j'=1}^{l'-1} 1_{B'_{j'}} + 1_{C'_{l'}}.$$

Posant

$$f_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i 1_{B_i}, \qquad g_1 = \lambda'_{l'}\left(1_{B'_{l'}} - 1_{C'_{l'}}\right) + \sum_{j'=l'+1}^{n} \lambda'_{j'} 1_{B'_{j'}}.$$

On est ramené à construire $\mathfrak{J}$, avec $n_1 + n_1' = n + n' - 1 = k - 1$ d'où le théorème.

Remarque. — La restriction ν diffuse est nécessaire pour construire $C'_{l'}$; nous avons vu qu'elle était aussi nécessaire pour la validité du théorème.

LEMME 7. — *Si les fonctions f et g de* $L^p(E, \mu)$, $1 < p < \infty$, *vérifient les conditions suivantes :*

a) $\| f \|_p = \| g \|_p = 1$.
b) $\| f - g \|_p = \theta > 0$.

Il existe une constante $K(p, \theta)$ telle que :

$$\| f + g \|_p \leqslant K(p, \theta) < 2.$$

C'est une manière d'écrire l'uniforme convexité de $L^p(E, \mu)$ (cf. [*13*]).

LEMME 8. — *Soit $\Phi(t)$ une fonction caractéristique telle que $\widehat{\Phi^n}(t)$ soit singulière $\forall n > 0$ ($\widehat{\Psi}$ désignant la transformée de Fourier de Ψ). Si l'on pose*

$$2(1 - \varphi(t)) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\lambda[2(1-\Phi(t))]^{p/2}}}{\lambda} d\mu(\lambda) \quad \text{avec} \quad \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} d\mu(\lambda) = 1 ;$$

Alors $\varphi(t)$ est la covariance d'un processus gaussien déterministe (au sens de Wiener) :

$$\varphi(t) = \int_0^\infty \frac{1 - 2e^{-\lambda} - e^{-\lambda[2(1-\Phi(t))]^{p/2}}}{\lambda} d\mu(\lambda).$$

Posons :

$$2(1 - \psi(t))^2 = 2^{p/2}(1 - \Phi(t))^p$$

$$\psi(t) = 1 - 2^{p/2-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \Phi^k(t), \qquad \alpha_k \geqslant 0$$

$$\psi^n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^n \Phi^k(t), \qquad \alpha_k^n \geqslant 0.$$

$\psi^n(t)$ est donc une fonction caractéristique et l'on a pour tout n support $\widehat{\psi^n}(t) \subset \cup_{k=1}^{\infty}$ supports $\widehat{\Phi^k}(t)$.

La mesure de Lebesgue du support de $\widehat{\psi^n}$ est donc nulle. On a de plus :

$$1 - 2e^{-\lambda} + e^{-\lambda 2[1-\psi(t)]} = 1 - 2e^{-\lambda} + e^{-2\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{\psi^n(t)}{n\,!} ;$$

On en déduit par intégration que :

$$\text{support}\ \widehat{\varphi}(t) \subset \cup_1^\infty \text{ support } \widehat{\psi^n}(t),$$

donc $\widehat{\varphi}$ est singulière, et le processus de corrélation $\varphi(t)$ est déterministe d'après le théorème de Wiener [*15*].

LEMME 9. — *Il existe une fonction caractéristique* $\Phi(t)$ *telle que* $\Phi(t)$ *et* $\varphi(t)$ *étant liées comme au lemme 8, on ait :*

a) *Le processus de covariance* $\varphi(t)$ *est déterministe.*

b) $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\ \Phi(t) < 1.$

En effet posons $\Phi(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos \frac{t}{3^n}$ ($\widehat{\Phi}$ mesure de Cantor), $\widehat{\Phi^n}(t)$ est singulière. En effet $\widehat{\Phi^n}$ est un produit infini de convolution de masses, et d'après le théorème de « pureté » de Jessen-Van Kempen-Wintner [*14*], $\widehat{\Phi^n}$ ne peut-être que absolument continue, discrète ou singulière.

On a : $0 < \overline{\lim}\ \Phi(t) < 1$, ce qui exclut les 2 premiers cas. Le lemme résulte alors du lemme précédent.

Remarque. — Si $p = 2$, si Φ est analytique, φ l'est aussi. On peut alors prendre $\Phi(t)$ analytique, avec $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\ \Phi(t) < 1$.

Démonstration du théorème. — Posons :

$$N(t) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\lambda t^p}}{\lambda}\, d\mu(\lambda).$$

Soit $H(t)$ le processus gaussien défini par :

$$E\,|\,H(t) - H(s)\,|^2 = 2C_p(1 - \Phi(t - s)),$$

où C_p est une constante telle que $E\,|\,H(t)\,|^p = 1$ et Φ la fonction caractéristique introduite au lemme 9.

Soit $f \in L^p(E, \mu)$, μ diffuse, $\|f\|_p = 1$, soit g une approximation étagée de f, telle que $\|f - g\|_p < \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$ donné.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l'espace de probabilité sur lequel est défini le processus $H(t)$; soit $h(t)$ une approximation étagée de la variable gaussienne $H(t)$ telle que $\|H(t) - h(t)\|_p < \varepsilon'$ (H, $h \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$).

Sur $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ considérons la fonction gaussienne Y définie par $E\,|\,Y(k) - Y(k')\,|^2 = N(\|k - k'\|^p)$ et posons $G(t) = Y(H(t))$; $(Y(0) = 0)$.

On a donc $E\,|\,G(t) - G(s)\,|^2 = 2(1 - \varphi(t-s))$, φ étant la fonction définie au lemme 8, $G(t)$ étant déterministe, pour tout $T \geqslant 0$, il existe, $\forall n > 0$ fixé, des constantes réelles λ_i, t_i, $i = 1, \ldots, n(\eta, T)$, avec $t_i < 0$ telles que

$$E\,|\,G(T) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i G(t_i)\,|^2 < \eta^2.$$

Comme $\overline{\lim}\ \Phi(t) < 1$ $(t \to \infty)$, il existe $T_0 < \infty$ et $\theta > 0$ tels que si $|\,t - s\,| > T_0 > 0$, on ait $\|\,H(t) - H(s)\,\|_p > \theta$.

D'après le lemme 6, si on désigne par $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel de dimension finie engendrée par les fonctions étagées $h(t_i)$, $(i = 1, \ldots, n)$ et $h(T)$, il existe une isométrie $\mathfrak{J}$ de $\mathcal{E}$ sur $\mathfrak{J}(\mathcal{E})$ espace de fonctions étagées sur $L^p(E, \mu)$ telle que $\mathfrak{J}(h(T)) = g$.

On a :

$$E(\,|\,X(\mathfrak{J}(h(T))) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X(\mathfrak{J}h(t_i))\,|\,)^2 = E(\,|\,Y(h(T)) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y(h(t_i))\,|\,)^2$$

$X(\widehat{h})$ étant la fonction gaussienne définie sur $L^p(E, \mu)$ par

$$E(\,|\,X(\widehat{h}) - X(\widehat{h}')\,|\,)^2 = N(\|\,\widehat{h} - \widehat{h}'\,\|_p).$$

On a :

$$[E\,|\,(Y(h(T)) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y(h(t_i))) - (G(T) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i G(t_i))\,|^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant [E\,|\,Y(h(T)) - G(T)^2]^{\frac{1}{2}} + \Big[\sum_{i=1}^{n} E\,|\,\lambda_i(G(t_i) - Y(h(t_i))\,|^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \Big(1 + \Big(\sum_{i=1}^{n} |\,\lambda_i\,|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big) N(\varepsilon')^{\frac{1}{2}}$$

$$E(\,|\,X(\mathfrak{J}(h(T)) - X(f)\,|)^2 \leqslant N(\varepsilon_1)$$

soit

$$[E(\,|\,X(f) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X(\mathfrak{J}(h(t_i)))\,|)^2]^{\frac{1}{2}} \leqslant N(\varepsilon_1)^{\frac{1}{2}} + N(\varepsilon')^{\frac{1}{2}}\Big[1 + \Big(\sum_{i=1}^{n} |\,\lambda_i\,|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big].$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné, T_0 fixe, choisissons λ_i, t_i, de manière à ce que $\eta \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$, puis ε' tel que $N(\varepsilon')^{\frac{1}{2}}\Big[1 + \Big(\sum_{i=1}^{n} |\,\lambda_2\,|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big] \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$, ε_1 tel que $N(\varepsilon_1)^{\frac{1}{2}} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$.

D'où le résultat :

Soit $f_0 \in L^p(E, \mu)$, $\| f_0 \|_p = 1$, $\varepsilon > 0$ fixe, il existe une famille (λ_i, f_i), finie, telle que $\lambda_i \in R$, $f_i \in L^p(E, \mu)$ et

$a)$ $E \mid X(f_0) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X(f_i) \mid^2 \leqslant \varepsilon^2$.

$b)$ $\| f_i \|_p = 1, i = 1, \ldots, n$.

$c)$ $\| f_0 - f_i \|_p \geqslant \theta - \varepsilon, \theta > 0; i = 1, \ldots, n$.

Il suffit de poser $\mathfrak{J}(h(t_i)) = f_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Supposons maintenant la fonction gaussienne $X(f)$ donnée dans la boule de centre O, de rayon $K_p\left(\frac{\theta}{2}\right)$, avec $K_p\left(\frac{\theta}{2}\right) < 2$, constante introduite au lemme 7.

On a, en appliquant les propriétés a, b, c, à des fonctions translatées de $\frac{f_0}{2}$,

$b')$ $\left\| f_i - \frac{f_0}{2} \right\|_p = 1; i = 1, \ldots, n$.

$c')$ $\| f_i - f_0 \|_p \geqslant \theta - \varepsilon, \theta > 0, i = 1, \ldots, n$.

$a')$ $E \mid X(f_0) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X(f_i) \mid^2 \leqslant \varepsilon^2$.

$d')$ $\| f_i \|_p \leqslant K_p\left(\frac{\theta}{2}\right) < 2 ; i = 1, \ldots, n$.

La fonction X étant connue dans la boule de rayon $K_p\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est donc connue en tout point f, situé dans la boule de rayon 2, puisque l'on a

$$X(f) = \lim_{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \lambda_i(\varepsilon) X(f_i(\varepsilon))$$

(limite au sens de L^2).

Le théorème est ensuite étendu à tout l'espace par homothétie.

Remarque. — On peut rapprocher le théorème 8 sur le déterminisme du théorème 7 qui montre que sur $L^p(E, \mu)$, $\| f - g \|^{\frac{1}{2}}$ est une distance de type 2 ($1 < p \leqslant 2$). Soit $\mathfrak{J}(L^p)$ l'image de L^p dans L^2 par le plongement associé, alors si μ est diffuse, $\mathfrak{J}(L^p)$ est déterminé par ses valeurs sur la boule unité de L^p.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] SCHOENBERG, *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, t. 44, 1938, p. 522.
[*2*] LÉVY P., *Annales de l'École Normale Supérieure*, t. 80, 1963, p. 193-212.
[*3*] LÉVY P., *Processus stochastiques.* Gauthier-Villars.
[*4*] NEVEU J., *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson.
[*5*] HALMOS, *Measure theory*, Van Nostrand, p. 170 et p. 173.
[*6*] BOURBAKI, Intégration, Chap. II.
[*7*] BOHNENBLUST, *Duke Mathematical Journal* (6), 1940, p. 627.
[*8*] RACEVA, *Soviet translations*, 1961.
[*9*] LOEVE, *Probability theory*, 3e act., Van Nostrand.
[*10*] BRETAGNOLLE, DACUNHA CASTELLE et KRIVINE, *Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences*, Paris, t. 231, p. 2153.
[*11*] BRETAGNOLLE et DACUNHA CASTELLE, Séminaire de calcul des probabilités. Paris, 1964-1965.
[*12*] GNEDENKO-KOLMOGOROV, *Limits sums of independent random variables.* Addison-Wesley, p. 179.
[*13*] NAKANO, *Linear Topological Spaces*, 1951, Tokyo.
[*14*] VAN KAMPEN, *American Journal Math.*, t. 62, 1940, p. 417.
[*15*] ROZANOV, *Processus stationnaires du 2e ordre*, Moscou.

(Manuscrit reçu le 17 décembre 1965).