SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

D. DACUNHA-CASTELLE

**Variables aléatoires échangeables et espaces d'Orlicz**

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1974-1975), exp. n° 10, p. 1-10.
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A9_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
*17, rue Descartes*
*75230 Paris Cedex 05*

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 4 - 1 9 7 5

# VARIABLES ALEATOIRES ECHANGEABLES ET ESPACES D'ORLICZ

par D. DACUNHA-CASTELLE

Exposé N$^{o}$ X

22 Janvier 1975

Soit $(\Omega,\mathcal{O},P)$ un espace de probabilité, $\mathfrak{B}$ une sous-$\sigma$-algèbre de $\mathcal{O}$.
Si $Y_1 \dots Y_n$ sont des variables aléatoires, on définit par $\mathcal{L}(Y_1 \dots Y_n)$ la loi (sur $\mathbb{R}^n$) de $Y_1 \dots Y_n$.

<u>Définition</u> : Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables est dite <u>écartable</u> (resp. <u>échangeable</u>) <u>au dessus de $\mathfrak{B}$</u>, si pour tout $k\in\mathbb{N}$, tout $(n_1,\dots,n_k)$, $n_1<n_2<\dots<n_k$ (resp.: $n_1\neq n_2\neq\dots\neq n_k$), tout $h\in\mathbb{N}$ toutes variables $X_1,\dots,X_h$, $\mathfrak{B}$-mesurables, on a :

$$(1) \qquad \mathcal{L}(X_1,\dots,X_h,U_{n_1},\dots,U_{n_k}) = \mathcal{L}(X_1,\dots,X_h,\ U_1,\dots,U_k)$$

Si $\mathfrak{B}$ est la $\sigma$-algèbre triviale, on dira simplement écartable (resp. échangeable).
On suppose à partir de maintenant que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables définies sur un espace $(\Omega_1,\mathcal{O}_1,P_1)$ ayant la propriété P suivante :

(P) $\qquad \{\mathcal{L}(X_n),\ n\in\mathbb{N}\}$ est relativement compact (pour la convergence étroite) et $0\notin\overline{\{\mathcal{L}(X_n),n\in\mathbb{N}\}}$

Soit alors $\mathfrak{D}$ un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$.
L'ensemble de formules

$$(2) \qquad \mathcal{L}(X'_1,\dots,X'_h,U_1,\dots,U_{k-1},\ U_k) = \lim_{\mathfrak{D}} \mathcal{L}(X_1,\dots,X_h,U_1,\dots,U_{k-1},X_n)$$

définit des suites de variables $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un espace $(\Omega_2,\mathcal{O}_2,P_2)$ telles que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient isonômes (c'est-à-dire de même loi).

En effet, (2) a bien un sens d'après (P) et il suffit alors d'appliquer le théorème de Kolmogorov à la famille projective de lois $\{\mathcal{L}(X'_1,\dots,X'_h,U_1,\dots,U_k\}$.
On identifiera dans la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on considérera toujours $(\Omega_1,\mathcal{O}_1,P_1)$ comme plongé dans $(\Omega_2,\mathcal{O}_2,P_2)$ (c'est-à-dire $\mathcal{O}_1\subset\mathcal{O}_2$ et $P_1=P_2$ restreinte à $\mathcal{O}_1$). Enfin, pour simplifier l'écriture, on notera $(\Omega,\mathcal{O},P)$ pour $(\Omega_2,\mathcal{O}_2,P_2)$ et $\sigma(X)$ pour la $\sigma$-algèbre engendrée par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{O}$.

On dira que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite d'<u>indiscernables</u> construite au-dessus de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On notera $C_b(\mathbb{R}^k)$ l'ensemble des fonctions continues bornées.

<u>Définition</u> : On dira que la variable Z approche en probabilité, à $\varepsilon$ près, la variable Y si $P(|Y-Z| \leqq \varepsilon) > 1-\varepsilon$.

<u>Lemme 1</u> : On a

$$(3) \qquad \mathcal{L}(Y_1,\dots,Y_h,U_1,\dots,U_{k-1},U_k) = \lim_{\mathfrak{D}} \mathcal{L}(Y_1,\dots,Y_h,U_1,\dots,U_{k-1},X_n)$$

pour tout $h, k\in\mathbb{N}$, tout $Y_1,\dots,Y_h$, $\sigma(X)$ mesurables.
En effet, soit $f\in C_b(\mathbb{R}^h)$. Alors il existe $m\in\mathbb{N}$, et $\varphi\in C_b(\mathbb{R}^m)$ tel que $\varphi(X_1,\dots,X_m)$ approche $f(Y_1,\dots,Y_h)$ à $\varepsilon$ près en probabilité et $\|\varphi\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.
On a, si $\psi\in C_b(\mathbb{R}^k)$

$$|E f(Y_1,\dots,Y_h)\,\psi(U_1,\dots,U_k) - E\varphi(X_1,\dots,X_m)\,\psi(U_1,\dots,U_k)| < \varepsilon + 2\varepsilon\|\psi\|_\infty\|f\|_\infty$$

Comme $\varepsilon$ est arbitraire, (3) se déduit alors de (2).

<u>Lemme 2</u> : La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des indiscernables construits au-dessus de $X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est écartable au-dessus de $\sigma(X)$, et formée de variables distinctes.

- Montrons par récurrence sur k que pour tout h, toutes $Y_1,\dots,Y_h$, $\sigma(X)$ mesurables, on a pour tout $n_1 < n_2 < \dots < n_k$

$$(4) \qquad \mathcal{L}(U_{n_1},\dots,U_{n_k},Y_1,\dots,Y_h) = \mathcal{L}(U_1,\dots,U_k,Y_1,\dots,Y_h)$$

Pour $k=1$, on a

$$\mathcal{L}(U_n,Y_1,\dots,Y_h) = \lim_{\mathfrak{D}} \mathcal{L}(X_n,Y_1,\dots,Y_h)$$

(d'après le lemme 1)

$$= \mathcal{L}(U_1,Y_1,\dots,Y_h)$$

Soit alors $k>1$.

$$\mathcal{L}(U_{n_1},\dots,U_{n_k},Y_1,\dots,Y_h) = \lim_{\mathfrak{D}} \mathcal{L}(U_{n_1},\dots,U_{n_{k-1}},X_n,Y_1,\dots,Y_h)$$

(d'après le lemme 1 et la remarque que si $\mu_n \xrightarrow{\mathfrak{D}} \mu$ (pour la convergence étroite sur $\mathbb{R}^n$) alors toute marginale $\mu_n^{m'}$ (et toute projection de $\mu_n$ sur $\mathbb{R}^{m'}$), $m' < m$ est telle que $\mu_n^{m'} \to \mu^{m'}$).

Donc

$$\mathcal{L}(U_{n_1}, \dots, U_{n_k}, Y_1, \dots, Y_h) = \lim_{\mathfrak{D}} \mathcal{L}(U_1, \dots, U_{k-1}, X_n, Y_1, \dots, Y_h)$$

(par hypothèse de récurrence)

$$= \mathcal{L}(U_1, \dots, U_{k-1}, U_k, Y_1, \dots, Y_h)$$

Comme

$$\mathcal{L}(U_1 - U_2) = \mathcal{L}(U_{n_1} - U_{n_2}) \quad , \qquad n_1 < n_2$$

$$= \lim_{\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{D}} \mathcal{L}(X_{n_1} - X_{n_2})$$

il résulte de (P) que $P(U_i \neq U_j) > 0$ pour tout $i \neq j$, d'où le lemme 2.

<u>Proposition 1</u> : $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est échangeable au dessus de $\sigma(X)$.

<u>Démonstration</u> : En utilisant comme précédemment le théorème de Kolmogorov, on définit un espace $(\Omega', \mathcal{O}', P')$ tel que $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ et $P'$ restreinte à $\mathcal{O}$ soit $P$ et on définit une variable $W$ sur $(\Omega', \mathcal{O}', P')$ à partir de l'ensemble des formules :

$$(5) \quad \mathcal{L}(Y_1, \dots, Y_h, U_1, \dots, U_k, W) = \lim_{\mathfrak{D}} \mathcal{L}(Y_1, \dots, Y_h, U_1, \dots, U_k, U_n)$$

pour tout $h, k \in \mathbb{N}$, $Y_1, \dots, Y_h$, $\sigma(X)$ mesurables.

Soit $f, f_1, \dots, f_k \in C_b(\mathbb{R})$, $Y$ $\sigma(X)$ mesurable, on a

$$E f(Y) f_1(U_1) \dots f_{k-1}(U_{k-1}) f_k(U_k)$$

$$= E f(Y) f_1(U_{n_1}) \dots f_{k-1}(U_{n_k - 1}) f_k(U_{n_k})$$

pour tout $n_1 < \dots < n_k$.

$$= E f(Y) f_1(U_{n_1}) \dots f_{k-1}(U_{n_{k-1}}) f_k(W)$$

par définition de $W$.

Soit $\mathfrak{B}_{n_1} = \sigma((X_n)_{n \in \mathbb{N}}, U_n, n \geq n_1)$. On a donc :

$$E f(Y) f_1(U_1) \dots f_k(U_k) = E f(Y) \dots f_{k-1}(U_{n_{k-1}}) E^{\mathfrak{B}_{n_1}} f_k(W)$$

Soit $\tilde{\varphi} = \varphi(X_1 \dots X_h, U_{n_1}, \dots, U_{n_1+\ell})$, $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^{h+\ell})$ approchant à $\varepsilon$ près en probabilité $E^{\mathfrak{B}_{n_1}} f_k(W)$.

On a

$$|E f(Y) f_1(U_{n_1}) \dots f_{k-1}(U_{n_{k-1}}) \tilde{\varphi} - E f(Y) f_1(U_1) \dots f_k(U_k)| < \varepsilon \|f_k\|_\infty$$

En faisant tendre $n_{k-1}$ vers $\infty$, on obtient (lemme 2)

$$|E f(Y) f_1(U_{n_1}) \dots f_{k-1}(W) \varphi - E f(Y) f_1(U_1) \dots f_k(U_k)| < \varepsilon \|f_k\|_\infty$$

d'où

$$E f(Y) f_1(U_{n_1}) \dots f_{k-1}(W) E^{\mathfrak{B}_{n_1}} f_k(W) = E f(Y) f_1(U_1) \dots f_k(U_k)$$

puisque $\varepsilon$ est arbitraire, et de proche en proche

$$(8) \qquad E[f(Y) \prod_{i=1}^k f_i(U_i)] = E f(Y) [\prod_{i=1}^k E^{\mathfrak{B}_{n_1}} f_i(U_{n_i})]$$

d'où la proposition 1 ; on voit de plus que les variables $(U_n)$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathfrak{B}_{n_1}$ pour tout $n_1$, comme $\mathfrak{B}_{n_1} \downarrow \mathfrak{B}_\infty$, $\sigma$-algèbre engendrée par $\sigma(X)$ et $q(U)$, ou $q(U) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(U_m, m \geq n)$ d'après le théorème des martingales, (8) vaut aussi pour $\mathfrak{B}_\infty$ à la place de $\mathfrak{B}_{n_1}$.

Soit alors a fixé, $\varphi_a = \sigma(X_n, n \geq a)$.

Soit $f, \varphi, \psi \in C_b$. Soit V une variable $q(U)$ mesurable. On a

$$(9) \quad E E^{\varphi_a} f(V) \varphi(U_1 \dots U_\ell) \psi(X_a, \dots, X_{a+h}) = \lim_{\mathfrak{D} \times \dots \times \mathfrak{D}} E E^{\varphi_a} f(V) \varphi(X_{n_1} \dots X_{n_\ell}) \psi(X_a, \dots, X_{a+h})$$

pour tout m, on peut approcher à $\varepsilon$ près en probabilité $f(V)$ par $\chi(U_m, \dots, U_{m+k})$, où $\chi \in C_b$, avec $m > \ell$.

On a

(10) $$E\chi(U_m,\dots,U_{m+k})\ \varphi(U_1,\dots,U_\ell)\ \psi(X_a,\dots,X_{a+h}) =$$

$$= \lim_{\mathfrak{D}} E\chi(U_m,\dots,U_{m+k})\ \varphi(X_{n_1},\dots,X_{n_\ell})\ \psi(X_a,\dots,X_{a+h})$$

(d'après l'échangeabilité des $U_n$ au-dessus de $\sigma(X)$).

On déduit alors de (9) et (10) que

$$E\,E^{\varphi_a} f(V)\ \varphi(U_1,\dots,U_\ell)\ \psi(X_a,\dots,X_{a+h}) = E\,f(V)\ \varphi(U_1,\dots,U_\ell)\ \psi(X_a,\dots,X_{a+h})$$

Donc

$$E^{\varphi_a} f(V) = f(V) \qquad \text{p s}$$

et par suite $$q(U) \subset \varphi_a$$

Si $q(X) = \bigcap_{a=1}^{\infty} \varphi_a$, on en déduit

<u>Proposition 2</u> : $q(U) \subset q(X)$ et

1) les $(U_n)$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $q(U)$,
2) les $(U_n)$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $q(X)$ au-dessus de $\sigma(X)$.

<u>Corollaire 1</u> : Toute suite de variables échangeables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est conditionnellement indépendante par rapport à $q(X)$.
En effet, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est échangeable, la double suite $((X_n)_{n\in\mathbb{N}},(U_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est échangeable,

($\mathcal{L}(Y_1,\dots,Y_k) = \mathcal{L}(Y_{n_1},\dots,Y_{n_k})$ ou $Y_1,\dots,Y_k$ et $Y_{n_1},\dots,Y_{n_k}$ sont des k-uplets de variables distinctes choisies parmi les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$), et $q(X) = q(U)$.

<u>Définition</u> : On dit qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>signe-invariante</u> si pour tout k, tout $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k$, $\varepsilon_1^2 = 1$, on a

$$\mathcal{L}(\varepsilon_1 X_1,\dots,\varepsilon_k X_k) = \mathcal{L}(X_1,\dots,X_k)$$

Soit F une fonction d'Orlicz modérée, c'est-à-dire une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$, $F(0) = 0$, $F(\infty) = \infty$ telle que $F(x+y) \leq C(F(x) + F(y))$. Dans toutes les questions concernant des espaces de Banach, on suppose F convexe.

On note $L_F(\Omega,\mathcal{A},P)$ l'espace d'Orlicz des fonctions F-sommables sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$, muni de la norme $\|Z\|_F$ définie par $\int_\Omega F\left(\frac{Z}{\|Z\|}\right) dP = 1$.

Enfin on note $[X,F]$, l'espace engendré dans $L_F$ par la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} = X$.

Dans la suite on se limitera au cas suivant :

(H)F est telle qu'il existe une fonction $F_1$, des constantes $x_o, a, b, c > 0$, une mesure de Lévy dM sur $[0,1]$ telles que H-1: $a < \frac{F(cx)}{F_1(x)} < b$

pour $x > x_o$ (c'est-à-dire F équivalente à l'$\infty$ à $F_1$ au sens des fonctions d'Orlicz

$$\text{H-2}: F_1(x) = \int_0^1 (1 - \cos tx)\, dM(t)$$

Les espaces $L_F$ et $L_{F_1}$ sont alors isomorphes.

Remarquons que $F(x) = x^p$, $0 < p < 2$ satisfait à cette condition, en effet si $F_1(x) = \int_0^1 \frac{1-\cos tx}{t^{p+1}}\, dt$, posant $C(x) = \int_0^1 \frac{1-\cos u}{u^{p+1}}\, du$, on a pour $x > 1$ :

$$0 < C(1) < C(x) < C(\infty) < \infty \quad ,$$

et donc $$C(1)x^p < F_1(x) < C(\infty)x^p$$

Supposons d'abord les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes et symétriques (signe-invariantes) et F admettant la représentation (H-2).

On a :

$$EF\left(\sum_1^N c_n X_n\right) = \int_0^1 E\left(1 - \cos t \sum_1^N c_n X_n\right) dM(t)$$
$$= \int_0^1 \left[1 - \exp \Sigma\, \psi(tc_n)\right] dM(t)$$

où
$$E \cos t X_i = \exp - \psi(t) = \varphi(t)$$

Supposons $\sum_1^N \psi(tc_n) \leq 1$, pour $0 \leq t \leq 1$.

Comme $(1 - e^{-1})u \leq 1 - e^{-u} < u$ pour $0 < u < 1$, on a

$$(1-e^{-1}) \sum_1^N \int \psi(tc_n)\, dM(t) \leq E F\left(\sum_1^N c_n X_n\right) \leq \sum_1^N \int_0^1 \psi(tc_n)\, dM(t)$$

Si $\psi(t) \leq 1$, on a $(1 - e^{-1})(1 - \varphi(t)) \leq \psi(t) \leqq 1 - \varphi(t)$.

Or
$$\int_0^1 (1-\varphi(\lambda t)\, dM(t) = \int_0^1 E(1 - \cos t \lambda X)\, dM(t)$$
$$= E F(\lambda X)$$

par le théorème de Fubini.

Posons alors $f(\lambda) = E F(\lambda X)$, et remarquons que $f$ est convexe si $F$ l'est.

On a donc pour $\sum_1^N \psi(tc_n) \leq 1$

(11) $$(1 - e^{-1})^2 \sum_1^N f(c_n) \leq E F\left(\sum_1^N c_n X_n\right) \leq \sum_1^\infty f(c_n)$$

On a $F'(0) = 0$, $F''(0) > 0$, il existe donc une constante $\alpha$ telle que

$$F(x) > \alpha^{-2}(1 \wedge x^2) \qquad (\wedge \text{ signifiant minimum})$$
$$> \alpha^{-2}(1 \wedge t^2 x^2) \quad \text{pour } 0 < t < 1$$

Donc
$$E(1 - \cos t Z) \leq 2 E(1 \wedge t^2 Z) < 2\alpha^2 E F(Z)$$
d'où
$$E \cos t Z = \varphi_Z(t)$$
$$= 1 - E(1 - \cos t Z)$$
$$\geq 1 - 2\alpha^2 E F(Z)$$

Supposons $2\alpha^2 \, E\,F(Z) < \frac{1}{2}$ , on a

$$
\begin{aligned}
|\psi_Z(t)| = |\log \varphi_Z(t)| &= |\log 1 - E(1-\cos t\,Z)| \\
&\leq 2\,E\,(1-\cos t\,Z) \\
&\leq 4\alpha^2\,E\,F(Z) \\
&\leq 1
\end{aligned}
$$

Donc si $E\,F(Z) \leq (4\alpha^2)^{-1} = \beta$ ($\beta$ ne dépendant que de F, pas de la loi de Z)

On a $|\psi_Z(t)| < 1$.
Pour $t < t_o$, $\psi_Z(t) > 0$.
Choisissons $\max_n(c_n)$ assez petit tel que $\psi(c_n t) > 0$ pour tout $t \in (0,1)$.
Alors si $E\,F\,(\sum_1^n c_n X_n) \leq \beta$, on a

$$
(12) \qquad (1-e^{-1})^2 \leq f(c_n) \leq \beta
$$

Pour tout espace d'Orlicz $L_F$, il existe 2 fonctions continues croissantes, nulles en 0, définies sur $\mathbb{R}^+$, soit $\Phi_1$, $\Phi_2$ telles que

$$
\Phi_1\,(\|Z\|_F) \leq E\,F\,(Z) \leq \Phi_2\,(\|Z\|_F) ,
$$

on déduit donc de (12), qu'il existe 2 constantes $\gamma_1$ et $\gamma_2$ dépendant de F mais pas de la loi des $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$
\gamma_1 \,\| \sum_1^N c_n X_n \|_{L_F} \leq \|(c_n)\|_{\ell_f} \leq \gamma_2 \,\| \sum_1^N c_n X_n \|_{L_F}
$$

d'où

<u>Théorème 1</u> : Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et symétriques, si F est une fonction d'Orlicz convexe satisfaisant (H), en particulier à $F(x) = x^p$, $1 \leq p < 2$, alors il existe une constante $\lambda(F)$ telle

que $[X_n,F]$ soit $\lambda(F)$ - isomorphe à $\ell_f$, ou $f(u) = EF(uX_n)$, $\lambda(F)$ est indépendante de la loi des $X_n$.

Supposons maintenant les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ échangeables et signe-invariantes, et limitons nous pour simplifier au cas $F(x) = x^p$.
On a $EF|\sum_1^n c_nX_n|^p = EE^{q(X)}|\Sigma\, c_nX_n|^p$.

Notons $\mu$ la probabilité trace de P sur la $\sigma$-algèbre $q(X)$.
On a donc

$$E\left|\sum_1^N c_nX_n\right|^p = \int E^{q(X)}|\Sigma\, c_nX_n|^p\, d\mu$$

D'après le théorème précédent, il existe $\mu$ p s pour tout $\omega$, une fonction d'Orlicz $f(\omega)$ et des constantes $\gamma_1$, $\gamma_2$ (indépendantes de $\omega$) telles que

$$\gamma_1\ \|c_n\|^p_{\ell_{f(\omega)}} \leq (E^{q(X)}|\Sigma\, c_nX_n|^p)(\omega) \leq \gamma_2\|c_n\|^p_{\ell_{f(\omega)}}$$

donc

<u>Proposition 3</u> : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables échangeables et signe invariantes, il existe une application bimesurable (pour $q(X)\otimes$ boréliens) $(x,\omega)\to f(\omega,x)$, ou $f(\omega,.)$ une fonction d'Orlicz et des constantes $\gamma_1$, $\gamma_2$ telles que

$$\gamma_1\int_\Omega \|c_n\|^p_{f_\omega}\, d\mu \leq \|\Sigma\, c_nX_n\|^p_{L^p} \leq \gamma_2\int\|c_n\|^p_{f_\omega}\, d\mu$$

Dans [1], un résultat inexact est énoncé. Un espace $[X_n,p]$ n'est pas, en général, un espace d'Orlicz, le lemme [III.1] de [1] est faux (l'ensemble considéré des mesures de Lévy n'est pas dénombrable !)
Depuis que nous nous sommes aperçus de cette erreur plusieurs contre exemples ont été donnés (Bretagnolle, Maurey). On peut, par exemple, considérer le cas où les lois $q(X)$-conditionnelles sont toutes des lois stables d'indice $p(\omega)$, $1 < q < p(\omega) < 2$.

Posons alors $S_N = \sum_1^N X_n$. On a $\dfrac{E^{q(X)}|S_N|}{N^{1/q}} = N^{1/p-1/q}$ et donc $\dfrac{E|S_N|}{N^{1/q}}$ est une fonction décroissante de N.

Supposons $[X_n,1]$ isomorphe à un espace d'Orlicz $\ell_f$. On sait qu'alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'envoie sur la base canonique d'un espace d'Orlicz, que l'on peut encore noter $\ell_f$. Notons $\sigma_N$ l'image de $S_N$ dans $\ell_f$.

On a $N f(\frac{1}{\|\sigma_N\|}) = 1$ donc, si l'on pose $\varphi(N) = \dfrac{\|S_N\|^q}{N}$, il existe des constantes $C_1$, $C_2$ telles que

$$C_1\varphi(N) \leq \frac{f(1/\|S_N\|}{1/\|S_N\|^q} \leq C_2\varphi(N)$$

f étant modérée est déterminée par ses valeurs sur la suite $(\|S_N\|_N)_{\in\mathbb{N}}$ à une équivalence près et donc $\frac{f(x)}{x^q}$ équivaut à une fonction croissante, ce qui implique que $\ell_f$ est réflexif puisque $q>1$ ([1]).

Or pour $\mu$ bien choisi $[X_n,1]$ n'est pas réflexif.

En effet, notons $A_\varepsilon = \{\omega,\ q<p(\omega)<q+\varepsilon\}$

$$\int_{A_{2\varepsilon}} E^{q(X)}|S_N|\, d\mu \geq \frac{1}{N^{q+\varepsilon}}\mu_\varepsilon \quad , \quad \mu_\varepsilon = \mu(A_\varepsilon)$$

$$\int_{A^c_{2\varepsilon}} E^{q(X)}|S_N|\, d\mu \leq \frac{1}{N^{q+2\varepsilon}} \quad .$$

Choisissons alors $\varepsilon(N)$ tel que $\mu(\varepsilon_N)\to 0$ $(\varepsilon_N\to 0)$, et $\frac{1}{N^{q+2\varepsilon_N}} < \mu(\varepsilon_N)\frac{1}{N^{q+\varepsilon_N}}$, par exemple $\varepsilon = 1/\sqrt{\log N}$ et $\mu$ telle que $\mu(1/\sqrt{\log N}) > \frac{1}{N^{1/\sqrt{\log N}}}$ .

Alors $\frac{S_N}{\|S_N\|}$ n'est pas équiintégrable donc $[X_n,1]$ n'est pas réflexif, donc n'est pas isomorphe à un espace d'Orlicz.

En modifiant un peu la situation, on a le même contre-exemple pour un espace réflexif $[X_n,1]$, (la seule condition simple pour que $[X_n,1]$ soit isomorphe à un espace d'Orlicz est que $\mu$ soit atomique et $[X_n,1]$ réflexif.

-----------

## BIBLIOGRAPHIE

[1] Bretagnolle et Dacunha-Castelle : Formes linéaires aléatoires et espaces d'Orlicz. Ann. ENS 4$^e$ série t2 fas4 1969 p437-480

-----------